

J. BUGNOT

Solution de la question 247

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 461-462

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__461_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 247

(voir t. IX, p. 358) ;

PAR M. BUGNOT (J.),
Élève de l'École Polytechnique.

Résoudre l'équation

$$(1) \quad 3^x = 54x - 135.$$

Je remarque que $54 = 2 \cdot 3^3$, et que $135 = 5 \cdot 3^3$;
l'équation est donc

$$3^x = 2 \cdot 3^3 x - 5 \cdot 3^3.$$

Je pose

$$(2) \quad x = 3 + y;$$

et, divisant tout par 3^3 , j'ai

$$3^y = 2x - 5 = 2(3 + y) - 5 = 2y + 1,$$

ou

$$(1 + 2)^y = 2y + 1;$$

je développe le premier membre par la formule du binôme, et il vient

$$y(y-1) \left[2 + \frac{(y-2)}{3} 2^2 + \dots \right] = 0.$$

De la sorte, les deux racines $y = 0$, $y = 1$, sont mises en évidence; et, se reportant à l'équation (2), on en tire

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = 4,$$

racines qui vérifient l'équation (1).

: Actuellement, ramenant l'équation (1) à la forme

$$f(x) = 0,$$

je prends la dérivée

$$f'(x) = 3^x \log' 3 - 54.$$

Pour que cette dérivée soit négative, il faut que l'on ait

$$3^x < \frac{54}{\log' 3},$$

inégalité qui sera vraie, à fortiori, si l'on a

$$3^x \leq \frac{54}{2} \text{ ou } 27;$$

car

$$\log' 3 = 1,0986122\dots < 2.$$

Or cette inégalité est évidemment satisfaite par

$$x \leq 3.$$

On voit de même que, pour $x \geq 4$, on a toujours

$$f(x) > 0.$$

Donc la fonction est constamment décroissante depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = 3$, et croissante depuis $x = 4$ jusqu'à $x = +\infty$; et, conséquemment, l'équation n'a pas de racines en dehors des limites 3 et 4.

En second lieu, il est évident que si une valeur de x rend positif le binôme $3^x \log' 3 - 54$, toute valeur supérieure $x + h$ le rendra, à fortiori, positif. Donc, quand la fonction $f(x)$, décroissante à partir de $x = 3$ et devenue négative, aura atteint son maximum, elle croîtra constamment et d'une manière continue jusqu'à l'infini. Donc elle ne pourra passer qu'une fois par zéro, ce qui aura lieu pour $x = 4$, puisque $f(4) = 0$. Ainsi l'équation proposée admet les racines 3 et 4 et n'en a pas d'autres.