

Notice historique sur le calcul des variations

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 433-448

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTICE HISTORIQUE SUR LE CALCUL DES VARIATIONS ;

TRADUIT DE L'ALLEMAND DE M. STRAUCH (*).

1. Quelques problèmes de Géométrie et de Mécanique ont donné naissance au calcul des variations , branche la plus élevée de l'Analyse. Nous rencontrons encore ici une marche particulière à l'esprit humain qui va du *difficile* au *facile*, du *compliqué* au *simple*, tandis qu'on devrait s'attendre à une marche opposée. Que de dissertations et de Mémoires ont dû être composés avant de débarrasser l'*idée* simple de ses accessoires , avant d'établir avec clarté le point *essentiel* du sujet !

Le premier problème de ce genre a été résolu par Newton lorsqu'il détermina la forme de la surface de révolution qui éprouve la moindre résistance en se mouvant dans un fluide, suivant la direction de son axe.

C'est en 1687 qu'il a publié le résultat sans faire connaître son procédé (*Principia Philos. naturalis mathematica*, sect. II, prop. 35, scol., édition de 1687 : c'est la prop. 34 dans les éditions postérieures).

Le second problème est celui de la brachistochrone.

Déjà Galilée s'est proposé ce dernier problème et trouva erronément que la courbe était le cercle (*Liber de motu et mech.*, dial. II, prop. 34, scol., page 209).

(*) Extrait d'un *Traité complet sur le calcul des variations*, publié, en 2 volumes in-8°, à Zurich, en 1849; un troisième volume, consacré aux intégrales doubles, est sous presse; ouvrage important sur lequel nous reviendrons, pour montrer qu'on a été doublement injuste envers ce calcul, en en exagérant la difficulté et atténuant l'utilité.

Mais en 1693, Jean Bernoulli résolut exactement le problème de la brachistochrone, et découvrit que c'était une cycloïde, et, en 1696, il fit paraître, à ce sujet, une provocation adressée aux géomètres. Cette invitation porte :

Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur.

« *Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignari mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevis-simo tempore perveniat ad alterum punctum B.* »
(*Acta Eruditorum Lipsiensia*, 1696, page 269.)

Leibnitz, Newton, Jacques Bernoulli, le marquis de l'Hôpital fournirent des solutions. Newton donna encore ici le résultat sans le procédé (*Philosophical Transactions* de 1697, n° 224, page 384). De même, le marquis de l'Hôpital. Ces divers travaux furent réunis par Leibnitz qui les publia en 1697 (*Act. Erud. Lips.*, 1697, mai). La solution de Jean Bernoulli parut aussi en 1697 (*Act. Erud. Lips.*, 1697, mai, p. 206).

Ce problème peut être considéré comme le commencement de cette longue suite de travaux qui ont pour objet les maximums et minimums des intégrales (*).

Ensuite on joignit à la condition des valeurs extrêmes encore cette autre condition, savoir, que la courbe cherchée ait une longueur donnée.

Jacques Bernoulli est le premier qui proposa publiquement de tels problèmes. Jean Bernoulli adressa un paquet cacheté à l'Académie royale des Sciences, avec la condition de n'ouvrir le paquet que lorsque son frère Jacques aurait fait connaître sa solution (*Journal des Savants*, février 1701).

Jacques publia sa solution la même année sous ce titre :

(*) Nous donnerons, d'après M. Strauch, une Notice particulière sur ce problème.

Analysis magni problematis isoperimetrici; Basle, 1701.

Cette solution, fondée sur un principe vrai, est exacte. Celle de Jean ne fut insérée qu'en 1706 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*. La solution est fautive; c'est ce que l'auteur finit par reconnaître lui-même. Il donna une nouvelle solution dans les *Mémoires* de 1718 de la même Académie. Le principe est le même que celui de son frère, mais avec des simplifications. Il en est de même de la solution que Taylor a donnée dans son ouvrage : *Methodus incrementorum directa et inversa*; Lond., 1715.

L'égalité des périmètres fit donner à ce genre de questions le nom de *questions isopérimétriques*, et la recherche d'une méthode pour les résoudre fut connue sous le nom de *problème isopérimétrique*.

Les questions où il s'agit de trouver des courbes satisfaisant à certaines conditions de maximum ou de minimum s'étant multipliées considérablement, il en résulta qu'on prit ces deux dénominations dans un sens plus général, plus étendu que ne comportent leurs significations littérales. On comprit sous le nom de *questions isopérimétriques* toutes celles où il faut déterminer des courbes jouissant de certaines propriétés *de maximis et minimis*, n'importe le nombre et l'espèce des conditions accessoires.

Les solutions s'accordaient bien dans les principes; mais il n'y avait pas de *méthode générale*. Euler entreprit cette recherche, et la poursuivit sans relâche.

Un premier Mémoire sur ce sujet parut en 1739 (*Comm. Petrap.*, tome VI, 1739 : *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*). Les divers problèmes sont partagés en classes :

Première classe. Trouver toutes les courbes où une certaine propriété A acquière une valeur extrême.

Deuxième classe. Parmi toutes les courbes de la première classe, trouver celles qui jouissent de la propriété B.

Troisième classe. Parmi toutes les courbes de la deuxième classe, trouver celles qui jouissent de la propriété C; et ainsi de suite.

Ce Mémoire avait besoin de perfectionnements et de développements.

Le second Mémoire parut en 1741 (*Comm. Petrap.*, tome VIII, 1741 : *Curvarum maximi minimæ proprietate gaudentium inventio nova et facilis*). Il contenait des parties défectueuses et peu claires.

En 1744, il publia un ouvrage étendu sous ce titre :

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimæ proprietate gaudentes, seu solutio problematis isoperimetricki in latissimo sensu accepti. Lausannæ et Genève, in-4°, 1744.

Tous les problèmes y sont partagés en deux classes. La première renferme les recherches de maximums et de minimums *absolus*. Dans la seconde classe, il s'agit des maximums et minimums *relatifs*. Aux problèmes connus, Euler en ajoute une foule d'autres qui enrichissent son œuvre d'une manière brillante. Les règles énoncées sont parfaites, en ce sens qu'elles sont générales et conduisent toujours au résultat vrai. Une règle de grande valeur est surtout celle par laquelle les questions de la seconde classe sont ramenées à celles de la première classe; mais toutes ces règles sont fondées sur des considérations géométriques, et l'on ne saurait trop admirer la perspicacité et l'adresse avec laquelle l'illustre géomètre surmonte toutes les difficultés. Toutefois la science pouvait prétendre à une méthode plus parfaite. C'est ce qu'Euler non-seulement sentait, mais ce qu'il a exprimé explicitement ainsi : *Une méthode débarrassée de toute considération géométrique est encore à désirer, qui puisse expliquer pour-*

quoi dans ce genre de questions il faut remplacer $P dp$ par $-pdP$ (*Methodus inveniendi*, etc. Au bas de la page 56 on lit : *Desideratur itaque*, etc.).

Cette méthode analytique si désirée fut découverte par Lagrange. Il en fit part dès 1755 à Euler qui avait si bien mérité du sujet (*Miscellanea Taurinensia*, tome IV, années 1766-69, 2^e partie, page 163).

Euler apprécia de suite la haute importance de la nouvelle invention, et le jugement qu'il en porta est consigné dans une lettre en date du 2 octobre 1759, adressée à Lagrange et où on lit : *La solution analytique du problème isopérimétrique ne laisse plus rien à désirer, et je me réjouis que cet objet, dont je me suis occupé si longtemps presque seul, ait été porté par vous au plus haut degré de perfection. L'importance du sujet m'a engagé, à l'aide de vos éclaircissements, de rédiger aussi une solution analytique du problème; mais je ne ferai rien paraître jusqu'à ce que vous ayez fait imprimer vos recherches, afin de ne pas vous dérober la moindre parcelle de la gloire qui vous appartient (*)* (voir la même page des *Miscellanea Taurinensia* citée ci-dessus).

La nouvelle invention ne fut rendue publique qu'en 1761 (*Miscellanea Taurinensia*, tome II, 1760-1761, 2^e partie, page 173 : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*). Cette invention consiste en ceci : Lagrange soumet une expression composée de variables et de différentielles à une nouvelle différentiation qu'il désigne non par la lettre usitée d , mais par la lettre δ ; et, quand cette lettre δ se trouve avant le signe d ou f , il le place derrière ces signes. Ensuite, il opère au-

(*) Excellente leçon de morale, de probité scientifique; exemple peu contagieux. Tm.

tant d'intégrations partielles jusqu'à ce qu'on ne rencontre plus sous le signe $\int$ aucune variable affectée à la fois des deux lettres d et ∂ .

Les avantages de ce procédé sont :

1°. D'être simple et général, c'est-à-dire qu'il peut s'étendre à un nombre quelconque de variables; de sorte que la recherche des courbes à double courbure et des surfaces devient aussi facile qu'auparavant, celle des courbes planes.

2°. On obtient non-seulement les équations principales, mais les équations aux limites; ce n'est que d'alors qu'il fut possible de poser des équations de condition et de les introduire dans le calcul.

Nonobstant ces avantages, on ne peut se dissimuler que dans ce premier Mémoire de Lagrange le manque d'un fondement scientifique se fait encore sentir, car il est loisible de demander :

1°. Quelle différence existe entre la nouvelle différenciation ∂ et l'ancienne d ?

2°. Est-on autorisé ou obligé d'écrire $d\partial$, $\int\partial$ au lieu de ∂d , $\partial\int$?

3°. La valeur de la différenciation pour ∂ n'est pas changée par les intégrations partielles ultérieures, pourquoi faut-il pourtant faire ces intégrations?

Alors Euler se permit de publier aussi ses travaux analytiques; il fit paraître deux Mémoires en 1766. Le premier porte le titre: *Elementa calculi variationum*, et le second: *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum*; les deux Mémoires se trouvent dans les *Novi Comm. Acad. Petrop.*, tome X; 1766. Ici, Euler s'applique à établir des principes à l'aide desquels on puisse donner des fondements solides à la méthode de Lagrange, à laquelle il donne le nom de *calcul des variations*, qui est resté. A la fin du second Mémoire, il donne

pour la première fois l'équation connue sous le nom d'équation de condition d'intégrabilité.

Quoique Euler reconnût les droits de Lagrange, l'illustre inventeur eut pourtant des désagréables prétentions à repousser. Dès 1734, Fontaine avait appliqué une méthode nouvelle et qui lui est particulière pour résoudre le problème de la ligne tautochrone (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, 1734). En 1767, il prétendit que cette méthode s'appliquait à toutes les questions de *maximis* et de *minimis*; mais qu'on n'en avait pas fait usage. A cet effet, il publia un Mémoire, pour soutenir cette assertion (*Mémoires de l'Académie*, 1767). Là, il accuse Lagrange de s'être égaré dans la nouvelle route que ce dernier avait choisie, parce qu'il n'avait pas assez approfondi la théorie, etc.; il propose en même temps deux méthodes qu'il donne pour nouvelles et meilleures que toutes celles que l'on a publiées sur cet objet. Lagrange répondit ainsi, en 1770 : *Pour ma justification, je crois n'avoir rien de mieux à faire que d'engager les connaisseurs à lire le Mémoire de M. Fontaine. On verra que l'une de ces méthodes est celle qu'Euler a publiée dans son ouvrage de 1744, et que la seconde n'est autre, pour le fond, que la mienne et n'en diffère que par une exposition moins bonne* (*Miscell. Taurin*, t. IV, années 1766-1769; 2^e partie, p. 164; ce volume, malgré cette date, renferme pourtant la justification de Lagrange, écrite le 28 mai 1770, comme on peut voir à la page 187; on y trouve même un Mémoire de 1771, p. 250).

A cette occasion, nous devons mentionner une seconde circonstance où Lagrange croyait qu'on voulait lui disputer l'honneur de l'invention. Les deux géomètres Jacquier et Leseur avaient publié, à Parme, un *Traité du Calcul intégral*; un chapitre entier du second volume est consacré à la nouvelle méthode, sans en nommer l'au-

teur; Lagrange dit à cela : *Je ne me serais pas plaint, s'ils s'étaient contentés d'accepter ma méthode, sans en nommer l'inventeur; c'est un procédé dont ils se sont rendus coupables en d'autres endroits; mais comme ils citent le Mémoire d'Euler, il paraîtrait qu'ils veulent lui attribuer la méthode, tandis que j'en suis le premier inventeur* (*Miscell. Taurin.*, t. IV, p. 165).

Le célèbre Borda écrivit aussi un Mémoire dans lequel il cherche à montrer que les équations aux limites, obtenues par la méthode de Lagrange, n'ont pas une entière certitude (*Académie royale des Sciences*, 1767 et 1768). A cet effet, il résout le problème de la brachistochrone dont Lagrange s'est occupé dans son premier Mémoire. Borda parvient à un résultat exact et qui ne s'accorde pas avec celui de Lagrange. Toutefois, ce fait ne prouve rien contre les équations aux limites. La raison en est que Lagrange est parti d'une formule qui n'est pas assez générale; car il pose la formule $t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$ (*Miscell. Taurin.*, t. II, p. 176); x sont les coordonnées parallèles à la direction de la pesanteur. Cette formule ne s'adapte qu'au cas où le mouvement commence avec $x = 0$, et ne convient pas aux cas où le mouvement commence à un autre endroit. Depuis, Lagrange a amélioré sa formule (*Miscell. Taurin.*, t. IV, p. 183) et l'a arrangée de manière que le mouvement peut commencer à un point quelconque de la brachistochrone. Dès lors Lagrange pouvait montrer que sous certains rapports ses premiers résultats (*Miscell. Taurin.*, t. II, p. 179 et 180) étaient exacts, et sous d'autres rapports Borda avait aussi raison. La certitude des équations aux limites fut ainsi établie d'une manière brillante.

En 1770, Euler publia un nouveau Mémoire sur le

calcul des variations, et qu'il a ajouté au troisième volume de son *Traité de Calcul intégral* (*); là, tout ce qui précède est surpassé. Jusqu'ici on n'avait mis le calcul des variations en relation qu'avec des questions *de maximis* et *de minimis*. L'auteur se débarrasse de cette idée étroite et annonce (§ 115) que ce calcul pouvait être rendu plus général, et que les problèmes se divisent en deux classes. Dans la première classe sont les problèmes où la relation entre y et x est considérée comme étant donnée, et l'on cherche la variation de l'intégrale $\int V dx$, en attribuant à x et à y des variations quelconques; dans la seconde classe, on cherche une relation entre x et y telle qu'elle donne une certaine propriété à l'intégrale $\int V dx$; par exemple que, devenant un maximum ou un minimum, la première variation $\delta \int V dx$ s'annule.

Euler s'appliqua désormais non-seulement à consolider les principes du calcul des variations, mais aussi à rendre plus intime la connexion de ce calcul avec les autres branches de l'Analyse. En 1772, parut un autre Mémoire : *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi* (*Novi Comm. Petrop.*, t. XVI, 1772); jusqu'ici on n'avait appliqué la méthode qu'à des expressions intégrales. Dans ce Mémoire, l'auteur se débarrasse de cette restriction, et réunit en trois catégories toutes les expressions qu'on peut soumettre à des variations; à la première appartiennent les expressions qui ne renferment que des

(*) *Institutiones calculi integralis*, 3 T., *Petrop.*; 1768-70. Le professeur Salomon en a publié une belle traduction allemande en 4 volumes in-8°; Vienne, 1828-30; le quatrième volume contient de nouveaux Mémoires d'Euler qui ne sont pas dans l'original latin. Une traduction française serait encore aujourd'hui d'une immense utilité. C'est au Ministre de l'Instruction publique à faire ouvrir cette riche mine d'enseignements. Cela viendra l'an 2440 quand on s'occupera des choses et non uniquement des personnes, quand la science sera séparée de la politique.

formes fonctionnelles; à la seconde, les expressions où l'on rencontre aussi des différentielles; et à la troisième, les expressions où il y a aussi des intégrales.

Au § 4, il reproduit le principe sur lequel il avait établi jusqu'ici le calcul des variations, et qui consiste à distinguer deux sortes de changements dans y : l'un désigné par dy provient de ce que x devient $x + dx$; l'autre désigné par δy est entièrement arbitraire et ne dépend pas de x . Ainsi considéré, le calcul des variations semblait constituer un genre particulier de calcul; mais en scrutant plus exactement l'essence de ce calcul, Euler découvrit qu'on pouvait le ramener entièrement à la théorie des différentielles partielles. Au lieu de conserver le changement appelé *variation*, il remplace l'équation $y = \varphi(x)$, d'abord par celle-ci $y + \Delta y = \varphi(x) + t\psi(x)$ où t est un infiniment petit; puis, passant à une forme plus générale, il considère y non plus comme une fonction de x seulement, mais comme une fonction de deux variables x et t , t étant une variable nouvellement introduite. C'est ce qu'il explique de cette manière : Soit $y = \varphi(x)$ l'équation d'une ligne; $y = \varphi(x, t)$ représentera toutes les lignes infiniment voisines si $\varphi(x, t)$ est telle, qu'en faisant $t = 0$, $\varphi(x, t)$ revient à $\varphi(x)$, et la formule $\frac{d\varphi(x, t)}{dt} dt$ remplace ce qui avait été désigné par δy .

Certes, l'introduction d'une nouvelle variable a donné au calcul des variations sa base véritable. Toutefois, je fais voir (§ 61) que ce moyen n'est pas à l'abri de quelques objections, et j'indique (§ 53) un autre procédé.

Dans aucun de ses Mémoires, Euler ne s'est occupé des variations du second ordre, nécessaires pour savoir s'il y a maximum ou minimum, ou si aucun des deux n'a lieu. Les premières recherches de ce genre ont été publiées par

Laplace, en 1772 (*Nova Acta eruditorum*, 1772, p. 193). Ensuite Legendre s'est occupé du même objet, dans un Mémoire de 1786 et dans un second Mémoire de 1787 (*Académie des Sciences*, 1786, p. 7, et 1787, p. 348); mais dans ces trois Mémoires il n'est question que des cas où y est fonction de la seule variable x .

Lagrange s'efforça aussi de consolider et d'étendre sa méthode. C'est ce qu'il fait dans sa *Théorie des fonctions analytiques* dont la première édition est de 1797, et la seconde de 1813. On y trouve bien des recherches sur les variations du second ordre, mais aussi pour les cas où l'on ne cherche qu'une seule fonction y d'une seule variable x (seconde partie, chap. XII, n^{os} 64-70; 2^e édition); et la méthode ne s'étend ni aux cas où y et z sont des fonctions de x , ou bien z fonction des deux variables x, y ; une seule question est pourtant traitée, où paraissent y et z , fonctions de x (seconde partie, chap. XII, n^o 73; 2^e édition); mais cette question est spéciale, et l'on ne donne pas de règles pour le cas général. Dans cet ouvrage, on trouve pour la première fois un problème où il s'agit de rendre *maximum* et *minimum* une expression qui renferme des différentielles, mais pas d'intégrales (seconde partie, chap. XI, n^{os} 59 et 60; 2^e édition); mais on ne donne que de faibles indications sur la théorie nécessaire pour résoudre de tels problèmes.

En 1806, dans la 2^e édition des *Leçons sur le calcul des fonctions*, Lagrange a considérablement perfectionné sa méthode, et l'a enrichie de beaucoup de problèmes intéressants (*). Imitant Euler, il remplace la fonction $\varphi(x)$ par celle-ci, $\varphi(x, t)$, telle qu'en faisant $t = 0$, $\varphi(x, t)$ revienne à $\varphi(x)$; ensuite il développe $\varphi(x, t)$, par le

(*) La 1^{re} édition forme le 12^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, 1804. La 2^e édition, qui a paru chez Courcier en 1806, est tellement augmentée, qu'on ne peut plus citer la 1^{re} édition.

théorème de Maclaurin, en cette série,

$$\varphi(x) + t\psi(x) + \frac{t^2}{1.2}\chi(x) + \dots$$

Cette marche, la même que celle d'Euler, est sujette aux mêmes objections. Ainsi tout le calcul des variations étant fondé sur le théorème de Maclaurin, il possède tous les avantages attachés à ce théorème.

Jetant un regard sur ce qui précède, nous voyons :

1°. Qu'Euler, par la méthode géométrique, porta si loin le problème isopérimétrique, que la science devait nécessairement découvrir une méthode analytique;

2°. Que Lagrange fit cette découverte;

3°. Qu'Euler s'est efforcé de consolider et de développer la méthode de Lagrange, et qu'il a considérablement perfectionné cette méthode, surtout en introduisant une nouvelle variable;

4°. Que Lagrange a reconnu que cette idée était la plus convenable au sujet et l'a adoptée comme base de sa méthode.

Outre Laplace et Legendre, auxquels, comme nous avons dit, le calcul des variations doit de précieuses acquisitions, d'autres géomètres ont cru devoir s'occuper de ce calcul; la plupart, sans faire avancer la science, se sont contentés de réunir, selon leurs propres vues, les propositions connues. Il serait superflu de donner une Notice détaillée de ces écrivains. Il nous suffit de dire que quelques-uns se sont tenus strictement à la forme *générale* qu'Euler a donnée pour base, savoir : de représenter la *variation immédiate* par une série infinie.

Parmi ceux-ci, on remarque Lacroix, qui a recueilli dans son ouvrage, et a exposé clairement et dans un bel ordre, tout ce qui a été fait (*Traité du calcul différentiel et intégral*, 2^e édition, t. II, 1814; p. 724, 744, 751).

D'autres ont adopté une forme qu'Euler a déjà déclaré

trop spéciale, savoir : la forme finie $\varphi(x) + t\psi(x)$ (*), croyant ainsi donner au procédé de l'élégance et le rendre simple, ils l'ont entaché de grands défauts. En effet, pour qu'une fonction $\varphi(x)$ puisse se changer dans la fonction arbitraire $\varphi(x, t)$, le développement de $\varphi(x, t)$ doit être représenté par une série infinie, réellement ou au moins idéalement existante. Si l'on prétend que la série est finie, il faut que la fonction $\varphi(x, t)$ jouisse de certaines propriétés qui permettent d'arrêter la série, et alors la fonction cesse d'être entièrement arbitraire. En outre, ce procédé conduit à beaucoup de contradictions, comme nous verrons dans divers endroits de cet ouvrage.

Toutefois, M. le professeur Martin Ohm fit paraître en 1825, 1831, 1833, 1839, quatre écrits qui méritent d'être pris en considération. Le calcul s'est enrichi et a pris de l'extension, ainsi que nous allons le faire voir.

Donnons d'abord les titres de ces ouvrages :

1°. *Lehre des größten and kleinsten*. Théorie du maximum et du minimum; Berlin, 1825.

2°. *System der mathematik*. Système des mathématiques, t. V; Berlin, 1831.

3°. *Idem*, t. VII; Berlin, 1833.

4°. *Lehrbuch der höhern mathematik*, en 2 vol., t. II; Berlin, 1839 (**).

L'ouvrage de 1825 contient une théorie générale du calcul des variations, très-complète et où plusieurs points

(*) Nous n'en citerons que trois :

1°. GERGONNE, *Annales des Mat.*, t. XIII; 1822.

2°. DIRKSEN, *Analytische darstellung der variations rechnung* (Exposition analytique du calcul des variations); Berlin, 1823.

3°. POISSON, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII; 1833, p. 231 et 243. *Traité de Mécanique*, 2^e édition; 1833, t. I, § 199, 202.

(**) On peut aussi citer les travaux de Jacobi (*Liouville*, tome III); de M. Cauchy (*Exercices d'Analyse*, tome III; 1844); de M. Delaunay (*Liouville*, tome VI), et le Mémoire couronné de M. Sarrus (*Savants étrangers*, tome X; 1848).

difficiles sont mieux traités qu'à l'ordinaire. On y trouve aussi une théorie très-développée du maximum et du minimum. L'auteur, d'après Euler, ramène toutes les questions à trois catégories. 1^o Les expressions purement fonctionnelles. Les recherches sont assez complètes; toutefois, il y manque plusieurs cas que j'ai indiqués dans mon ouvrage, t. I, § 162-179, et auxquels les questions 55-60 servent d'applications. 2^o Les expressions où entrent aussi des différentielles pour lesquelles Lagrange n'a donné que de légères indications; ici, ce cas est traité pour la première fois et avec une étendue suffisante. 3^o Les expressions qui renferment aussi des intégrales. Beaucoup de ces recherches se distinguent par la plénitude, et quelques-unes sont manquantes; ainsi: 1^o on trouve ici pour la première fois une recherche générale des variations du second ordre, pour le cas d'une intégrale simple, à deux limites constantes et pour deux fonctions y et z indépendantes l'une de l'autre, et chacune fonction de x ; mais lorsque y et z sont liées par une relation (par une équation algébrique ou différentielle), la recherche est à peine indiquée, et, toutefois, une règle spéciale est nécessaire. De même, ce qui concerne la variation du second ordre lorsque les limites des intégrales sont variables est inexact. 2^o Lors d'une intégrale double, on traite ici, pour la première fois, le cas où la variable, suivant laquelle se fait la première intégration est une fonction de la variable suivant laquelle on fait la seconde intégration. On montre comment il faut alors transformer la variation du premier ordre; mais cette transformation n'a rien de pratique. Pour des intégrales doubles, les équations aux limites présentent une infinité de cas à discuter, et nonobstant on ne mentionne que quelques cas particuliers; ainsi sous ce rapport il n'y a comme rien de fait. La variation du second ordre manque en entier.

Dans les ouvrages de 1831 et 1839, on donne une

théorie du calcul des variations, et, de plus, des séries élégantes, utiles, qui méritent de fixer l'attention.

Dans les deux ouvrages de 1833 et 1839, on trouve aussi une théorie générale du maximum et du minimum; c'est un extrait de l'ouvrage de 1825, une sorte d'exposition plus succincte.

Venons maintenant au point principal. Sur quelle base l'auteur a-t-il fondé son calcul? Cette base offre quelque chose de très-particulier. L'auteur pose de suite pour la variation immédiate,

$$y_x = y + x y_1 + \frac{x^2}{1.2} y_2 + \frac{x^3}{1.2.3} y_3 + \dots,$$

ou bien

$$y_x = y + x \delta y + \frac{x^2}{1.2} \delta^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \delta^3 y + \dots,$$

sans dire le moins du monde où il a pris cette série, ni d'où elle a pu se déduire. En effet :

Dans l'ouvrage de 1825, on lit : « Lorsqu'une expression y se développe par elle-même, indépendamment d'une autre expression, en une série ascendante suivant les puissances entières de π , alors on dit que l'expression y est *immédiatement variée selon* π ; mais si une expression V ne peut se développer en une telle série que parce qu'elle dépend d'une autre expression développée suivant une telle série, on dit alors que V est *variée médiatement selon* π . Lorsque π est infiniment petit, $y_\pi - y$, ou $V_\pi - V$ sont les variations de y ou de V . »

En représentant les variations immédiates par des séries infinies, M. Ohm n'a fait que revêtir son calcul de la vraie forme. Mais on est en droit de demander : d'où l'auteur déduit-il ces séries? Pourquoi n'a-t-il pas pris une marche d'où ces séries ressortent *nécessairement*? Pourquoi, sans dire le motif, a-t-il renoncé à la base posée par Euler et adoptée par Lagrange, etc.?

On a déjà dit que dans le Traité complet de 1825, on

trouve très-peu de chose sur les intégrales doubles. C'est ce qui a engagé Poisson à publier, en 1833, un Mémoire spécial sur cet objet (*Académie des Sciences*, t. XII; le Mémoire a été lu le 10 octobre 1831). Pour le cas où les limites de l'intégrale double sont variables, l'illustre analyste croit devoir introduire un nouveau principe; à la place des deux variables x, y , il met deux fonctions de deux nouvelles variables u et v , etc., et ramène finalement les deux variables x et y . Par ce procédé, la recherche, pas déjà très-simple, a été rendue plus compliquée et surchargée de difficultés superflues.

C'est la raison qui a porté M. Ostrogradsky à traiter le même sujet dans un Mémoire publié en 1834 (*Acad. de Pétersb.*, 6^e série, t. III; et *Journal de M. Crelle*, t. XV, 4^e cahier; 1836). Il montre que l'introduction de deux nouvelles variables n'est pas nécessaire et que le principe fondamental du calcul des variations suffit pour réunir toute généralité désirable et une extrême simplicité.

Toutefois, j'ai montré dans cet ouvrage (t. II, § 737 et 738), que les deux Mémoires, sous le rapport de la théorie et de la pratique, ne répondent pas à ce que le sujet exige. L'expression pour la variation du premier ordre n'est pas pratique, et est même inachevée. La variation du second ordre manque complètement dans les deux dissertations. On n'y trouve pas un seul exemple spécial propre à éclairer des recherches si difficiles dans les détails, etc.

Cette courte esquisse présente l'état où est actuellement la branche la plus élevée de l'Analyse; beaucoup a été fait et il reste encore bien des choses à faire. Nous avons vu aussi que, sous le rapport pratique, les ouvrages d'Euler et de Lagrange sont ornés d'applications belles et intéressantes; et cependant nous verrons plus loin que c'est précisément pour les applications qu'il reste le plus à faire.
