

J. DUPAIN

Intégration de deux équations différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 418-419

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__418_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRATION DE DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ;

PAR M. J. DUPAIN,

Élève de l'École Normale.

On propose d'intégrer le système d'équations simultanées suivant :

$$(1) \quad y \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} + a \sin z = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - y \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - a \cos z = 0.$$

Nous prendrons de nouvelles variables t, u liées aux anciennes par les relations

$$t = y \sin z, \quad u = y \cos z.$$

Les premiers principes du calcul différentiel nous feront connaître les dérivées de t et de u ,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{dy}{dx} \sin z + y \cos z \frac{dz}{dx}, & \frac{du}{dx} &= \frac{dy}{dx} \cos z - y \sin z \frac{dz}{dx}, \\ (3) \quad \frac{d^2 t}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dx^2} \sin z + 2 \cos z \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} - y \sin z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + y \cos z \frac{d^2 z}{dx^2}, \\ (4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dx^2} \cos z - 2 \sin z \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} - y \cos z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - y \sin z \frac{d^2 z}{dx^2}. \end{aligned}$$

Ajoutons au second nombre de l'équation (4) le premier membre de l'équation (1) multiplié par $\sin z$, et retranchons-en le premier membre de l'équation (2) multiplié par $\cos z$; il vient, réductions faites,

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = a.$$

Une combinaison analogue des équations (1), (2), (3) conduit à

$$(6) \quad \frac{d^2 t}{dx^2} = 0;$$

les équations (5), (6) fournissent immédiatement les intégrales

$$u = \frac{ax^2}{2} + Ax + B, \quad t = Cx + D,$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. On repasse aisément aux variables y, z ,

$$z = \arctan \frac{t}{u}, \quad y = \sqrt{t^2 + u^2};$$

les intégrales demandées sont donc

$$z = \arctan \frac{2(Cx + D)}{ax^2 + 2Ax + 2B},$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{4(Cx + D)^2 + (ax^2 + 2Ax + 2B)^2}.$$