

Génération modulaire et ombilicale des surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10 (1851), p. 345-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__345_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRATION MODULAIRE ET OMBILICALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

1. Étant donnés : 1° un point fixe (foyer); 2° une droite fixe (directrice); 3° un plan fixe ou seulement donné de direction; 4° un point de l'espace déterminé de telle sorte que la distance de ce point au foyer, divisée par la distance du même point à la directrice, distance mesurée parallèlement au plan, soit égale à un nombre donné. Le lieu de ce point peut devenir une surface quelconque du second degré, excepté les surfaces engendrées par la révolution d'une conique autour d'un axe focal.

C'est ce que les Anglais nomment la génération *modulaire*; le nombre donné s'appelle *module*.

2. Il est évident que le plan passant par le foyer, perpendiculairement à la directrice, est un plan principal.

3. Si l'on prend, par rapport à ce plan principal, un plan symétrique au plan fixe, en prenant le plan symétrique pour plan directeur, on obtient la même surface.

4. Un plan parallèle au plan directeur coupe la surface suivant un cercle ou suivant une droite.

En effet, soient F le foyer, I le point où le plan parallèle rencontre la directrice; M étant un point de la surface, le rapport $\frac{MF}{MI}$ est donné: le lieu du point M est donc ou sur une sphère, si ce rapport n'est pas égal à l'unité, ou sur un plan, si ce rapport est égal à l'unité; donc, etc.

5. Conservant le même module et le même plan directeur, la même surface peut être engendrée par une infinité de foyers et de directrices; tous ces foyers sont

sur une conique (la conique focale de M. Chasles) située dans le plan principal perpendiculaire à la directrice, et toutes les directrices sont sur un cylindre droit. Chaque directrice a pour polaire réciproque, par rapport à la surface, une tangente à la focale conique, et le point de contact est le foyer correspondant. La base du cylindre a été nommée *conique directrice modulaire*.

6. Dans l'hyperboloïde à une nappe et dans le paraboloïde hyperbolique, les deux coniques focales réelles (3) sont modulaires, pouvant servir à engendrer la surface; mais dans l'ellipsoïde, dans le paraboloïde elliptique et dans l'hyperbole à deux nappes, il n'y a qu'une des deux focales coniques qui soit *modulaire*: c'est celle qui ne rencontre pas. L'autre n'est pas *modulaire*, elle rencontre la surface aux *ombilics*; on la nomme *conique focale ombilicaire*.

7. Lorsque la même surface peut être engendrée par deux coniques focales, les modules ne sont pas les mêmes, ni les plans directeurs.

Soient m et n les deux modules, φ et φ' les angles correspondants que font les plans directeurs avec les plans principaux respectifs; on a la relation

$$\frac{\cos^2 \varphi}{m^2} + \frac{\cos^2 \varphi'}{n^2} = 1.$$

8. Soit m le module, et faisons varier m^2 de ∞ à 0 :

1°. $m = \infty$ à $m = 1$; la surface est un hyperboloïde à une nappe, et le foyer est sur une ellipse focale;

2°. $m = 1$; la surface est un paraboloïde hyperbolique et l'on a une parabole focale;

3°. De $m = 1$ à $m = \cos \varphi$; jusqu'à une certaine valeur intermédiaire entre $m = 1$ et $m = \cos \varphi$, la surface est un hyperboloïde à une nappe, mais ayant une position différente de celle qu'il a pour de $m = \infty$ à $m = 1$; les axes directifs réels et imaginaires échangent leurs positions respectives, et la parabole focale devient une

hyperbole. Lorsque m atteint cette valeur intermédiaire, la surface devient un cône, et l'hyperbole focale se change en deux droites; depuis cette valeur intermédiaire jusqu'à $m = \cos \varphi$, on a un hyperboloïde à deux nappes et la focale devient une hyperbole, mais dans une position *conjuguée* à la première; pour $m = \cos \varphi$, la surface devient un paraboloides elliptique et la focale une parabole, et de $m = \cos \varphi$ à $m = 0$, la surface devient et reste un ellipsoïde et la focale une ellipse.

Génération ombilicale.

9. On donne 1° un point fixe (foyer); 2° deux plans fixes; 3° un nombre fixe. On cherche un point dans l'espace tel, que le carré de sa distance au foyer, divisé par le produit de ses deux distances aux plans fixes, soit égal au nombre fixe; le lieu de ce point est une surface du second ordre.
