

ED. TERRÉ

Enveloppe d'une tangente à deux cercles variables

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10 (1851), p. 340-344

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851__1_10__340_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENVELOPPE D'UNE TANGENTE A DEUX CERCLES VARIABLES ;

PAR M. ED. TERRÉ,
Élève de M. Orcel, lycée Charlemagne.

PROBLÈME. *On donne deux cercles dont les centres sont fixes, et dont les rayons U et V doivent satisfaire à la relation*

$$mU + nV = p^2, \quad \bullet$$

m, n, p représentant des lignes.

On demande l'enveloppe des tangentes communes à ces deux cercles.

Solution. Soient ces deux cercles U et V dans une position particulière (*). Soient TT', t't' les tangentes communes à ces deux cercles. Soit 2d la distance des centres. Je prends pour axe des x la ligne des centres, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite élevée par le point O, milieu de la distance des centres.

L'équation de la droite TT', dans une position particulière, est

$$y = ax + b;$$

on aura

$$U = \frac{ad - b}{\pm \sqrt{a^2 + 1}}, \quad V = \frac{-ad - b}{\pm \sqrt{a^2 + 1}}.$$

(*) On est prie de faire la figure.

La relation

$$mU + nV = p^2$$

va me servir à déterminer b en fonction de a .

L'équation de la tangente TT' peut se mettre sous la forme

$$y = ax + \varphi(a).$$

Si, alors, on fait croître a d'une manière insensible, on aura les équations successives des différentes tangentes qui, par leurs intersections, donneront le lieu cherché. La méthode générale consisterait à prendre la dérivée par rapport à a de l'équation

$$y = ax + \varphi(a),$$

et ensuite à éliminer a entre ces deux équations. Mais si l'on essaye le calcul, on verra facilement que l'équation finale serait du huitième degré. Il faut donc, pour arriver à un résultat simple, avoir recours à quelques artifices.

Je vais, à cet effet, déterminer d'abord l'enveloppe des tangentes extérieures TT' . Je reprends l'équation

$$y = ax + b,$$

en y supposant a positif.

Les valeurs de U et de V seront, dans ce cas,

$$U = \frac{ad - b}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad V = \frac{-ad - b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

ou bien

$$U = \frac{ad - b}{-\sqrt{a^2 + 1}}, \quad V = \frac{-ad - b}{-\sqrt{a^2 + 1}}.$$

La relation

$$mU + nV = p^2$$

donne pour b , si l'on prend les premières valeurs de U et de V ,

$$b = + \frac{m - n}{m + n} \cdot ad - \sqrt{\frac{p^4(a^2 + 1)}{(m + n)^2}},$$

les secondes valeurs de U et de V donnent

$$b = + \frac{m-n}{m-n} \cdot ad + \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m+n)^2}};$$

l'équation de la tangente devient

$$y = ax + \frac{m-n}{m+n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m+n)^2}}.$$

Si l'on cherche l'équation de la tangente intérieure tt' , en supposant toujours a positif, on trouve

$$y = ax + \frac{m+n}{m-n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m-n)^2}};$$

si l'on suppose a négatif, les équations de ces tangentes sont

$$y = -ax - \frac{m-n}{m+n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m+n)^2}},$$

$$y = -ax - \frac{m+n}{m-n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m-n)^2}}.$$

Les équations générales des tangentes communes aux deux cercles sont donc

$$y = \pm ax \pm \frac{m-n}{m+n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m+n)^2}},$$

$$y = \pm ax \pm \frac{m+n}{m-n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m-n)^2}}.$$

Je dis maintenant que si l'on cherche l'enveloppe de l'une de ces droites, on aura une courbe du second degré.

La manière dont s'engendre le lieu fait voir évidemment que l'axe des x est un axe de symétrie.

Par conséquent, si cette enveloppe est une courbe du second degré, elle sera de la forme

$$y^2 + Cx^2 + 2Ex + F = 0;$$

or on sait que l'équation de la tangente à cette courbe est

$$(1) \quad y = ax + a \cdot \frac{E}{C} \pm \sqrt{\frac{a^2(E^2 - FC) + E^2C - C^2F}{C^2}}.$$

On voit, à l'inspection de cette équation, qu'on peut l'identifier avec une quelconque des droites précédemment trouvées. Donc le lieu se compose d'un système de courbes du second ordre.

L'équation (1) conduit au radical affecté du double signe $\pm$; ce qui indique que le lieu se composera de quatre courbes du second ordre.

Je vais démontrer maintenant que ces courbes du second degré sont des cercles. Je compare à cet effet l'équation (1) avec une des équations précédentes, avec l'équation suivante par exemple,

$$y = ax + \frac{m-n}{m+n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4(a^2+1)}{(m+n)^2}};$$

on aura les équations de condition,

$$\frac{E^2 - FC}{C^2} = \frac{p^4}{(m+n)^2}, \quad \frac{E^2C - C^2F}{C^2} = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

d'où

$$\frac{E^2 - FC}{C^2} = \frac{E^2 - FC}{C},$$

ou enfin $C = 1$.

On obtient donc un cercle.

On a immédiatement

$$E = \frac{m-n}{m+n} \cdot d; \quad F = \frac{(m-n)^2 d^2 - p^4}{(m+n)^2}.$$

L'équation du cercle est donc

$$y^2 + \left(x + d \frac{m-n}{m+n} \right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2}.$$

Par un calcul analogue, on trouvera pour équation des

autres cercles :

$$y^2 + \left(x + d \cdot \frac{m+n}{m-n} \right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2},$$

$$y^2 + \left(x - d \cdot \frac{m-n}{m+n} \right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

$$y^2 + \left(x - d \cdot \frac{m+n}{m-n} \right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2}.$$

Ces quatre cercles sont donc renfermés dans les deux équations suivantes :

$$y^2 + \left(x \pm \frac{m-n}{m+n} d \right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

$$y^2 + \left(x \pm \frac{m+n}{m-n} d \right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2};$$

on trouve donc en général quatre cercles placés symétriquement par rapport à l'origine, et égaux deux à deux.

Ce problème est susceptible de discussions.

Note. L'auteur donne ces discussions intéressantes, mais sans difficultés.
