

De la courbe balistique, par Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 336-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__336_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE LA COURBE BALISTIQUE, PAR JACOBI (*);

TRADUIT DU LATIN, PAR M. A.,
Ancien élève de l'École Polytechnique

Le grand géomètre Jean Bernoulli, dans les *Actes de Leipsick* pour l'année 1719, ramena aux quadratures le mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant uniformément, chaque fois que la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. Provoqué à déterminer le mouvement pour une résistance

(*) Extrait d'un Mémoire sur le mouvement d'un point. (Crelle, t. XXIV, p. 25; 1842.)

proportionnelle au carré de la vitesse, il résolut aussitôt la question plus générale. L'illustre Legendre apprit à ramener le problème balistique aux quadratures, quand la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse plus une constante. Comme aucune de ces deux questions ne se trouve dans les *Traité de Mécanique*, j'examinerai en peu de mots le cas où la résistance du milieu est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse plus une constante. Cette supposition embrasse l'une et l'autre question.

Soit $a + bv^n$ la résistance, a et b désignant des constantes, les équations dynamiques deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx'}{dt} = -(a + bv^n) \frac{x'}{v}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dy'}{dt} = -(a + bv^n) \frac{y'}{v} - g.\end{aligned}$$

Il suit de là

$$(a + bv^n)(x' dy' - y' dx') = gv dx',$$

d'où, en posant

$$x' = v \cos \eta, \quad y' = v \sin \eta,$$

on tire

$$v(a + bv^n) d\eta = g dx' = g(\cos \eta dv - v \sin \eta d\eta),$$

ou

$$g \cos \eta v^{-(n+1)} dv - (a + g \sin \eta) v^{-n} d\eta = b d\eta.$$

Supposons que la partie à gauche de l'équation qui précède, multipliée par un facteur convenable, devienne égale à la différentielle $d(Mv^{-n})$, on aura

$$\frac{dM}{M} = \frac{n(a + g \sin \eta) d\eta}{g \cos \eta},$$

d'où

$$(1) \quad M = \cos \eta^{-n} \cdot \text{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \eta \right)^{\frac{na}{g}},$$

et le multiplicateur devient

$$-\frac{nM}{g \cos \eta}.$$

De là, l'intégrale

$$(2) \quad M \nu^{-n} = -\frac{n}{g} \int \frac{b M d\eta}{\cos \eta}.$$

Cette formule continue à avoir lieu si b est une fonction quelconque de η ; elle aura encore lieu en supposant a fonction de η , pourvu que dans l'expression (1) on change le second facteur M .

Posons

$$r = \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \eta \right),$$

d'où

$$\cos \eta = \frac{2r}{1+r^2}, \quad \sin \eta = \frac{r^2-1}{1+r^2}, \quad \frac{d\eta}{\cos \eta} = \frac{dr}{r}.$$

De là, en posant

$$\frac{a}{g} = c,$$

on tire

$$(3) \quad M = 2^{-n} r^{n(c-1)} (1+r^2)^n;$$

d'où

$$(4) \quad 2^n M \nu^{-n} = -\frac{nb}{g} \int r^{n(c-1)} (1+r^2)^n \cdot \frac{dr}{r}.$$

Cette formule devient finie toutes les fois que n est un nombre entier positif. L'expression de ν en r devient surtout très-simple si l'on suppose

$$\frac{a}{g} = c = \frac{n+2}{n};$$

car alors on a, par la formule qui précède,

$$r^2 (1+r^2)^n \nu^{-n} = \frac{nb}{2(n+1)} (1+r^2)^{n+1} + \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

Ayant déterminé v en fonction de r , les formules générales donneront les expressions de x , y , t en fonction de la même quantité, au moyen des seules quadratures; car, w désignant la résistance, on a les équations

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= -\frac{x'}{v} w, \\ \frac{dy'}{dt} &= -\frac{y'}{v} w - g,\end{aligned}$$

d'où

$$w(x' dy' - y' dx') = g v dx',$$

ou

$$(5) \quad v w d\eta = g dx'.$$

Il suit de ces formules,

$$(6) \quad \begin{cases} dt = -\frac{v dx'}{x' w} = -\frac{v d\eta}{g \cos \eta} = -\frac{v dr}{gr}, \\ dx = x' dt = -\frac{v^2 d\eta}{g} = -\frac{2 v^2 dr}{g(1+r^2)}, \\ dy = y' dt = -\frac{v^2 \tan \eta d\eta}{g} = -\frac{v^2 (r^2 - 1) dr}{gr(1+r^2)}. \end{cases}$$

En substituant dans ces formules générales l'expression de la vitesse v en η ou en r , et intégrant, on obtient les valeurs de t , x , y . Si dans les formules (3) et (4) on pose $a = c = 0$, $n = 2$, on a les formules qu'on donne ordinairement.

La réduction aux quadratures réussit aussi lorsque la résistance est exprimée par la formule $a + b \log v$. Je ne poursuis pas plus loin cette hypothèse, parce qu'elle n'a pas lieu dans la nature et qu'elle est comprise dans les formules précédentes, en écrivant $a - \frac{b}{n}$ et $\frac{b}{n}$ au lieu de a et b , et posant ensuite $n = 0$.

Pour obtenir des approximations, Newton et les au-

teurs venus après lui mettaient , au lieu de la constante b , des fonctions de η ne variant pas beaucoup et donnant pour ν, x, γ, t des quadratures faciles. On en voit divers exemples dans le Mémoire de l'illustre Legendre ; mais les méthodes d'approximation de ce genre paraissent trop vagues.
