

Solution d'un problème sur la sommation d'une somme de puissances ; d'après M. A. Thacker

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 324-328

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__324_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LA SOMMATION D'UNE SOMME
DE PUISSANCES (*) ;**

D'APRÈS M. A. THACKER.

(Journal de M. Crelle, tome XL, page 89; 1850.)

1. PROBLÈME. *Soient m et n deux nombres entiers positifs, trouver la somme des puissances d'exposant n , de tous les nombres premiers à m et plus petits que m .*

Solution. Soit $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$; $a, b, c, \dots$ étant des

(*) M. Binet vient de traiter le même sujet. (*Compte rendu*, t. XXXII, p. 918.)

nombre premiers; posons

$\varphi(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + p^n$, p étant un nombre entier.

Les nombres compris entre 1 et m et divisibles par a sont

$$a, 2a, 3a, \dots, \frac{m}{a} \cdot a;$$

par conséquent, d'après l'énoncé du problème, il faut rejeter la somme

$$a^n + (2a)^n + (3a)^n + \dots + \left(\frac{m}{a} a\right)^n = a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right).$$

Posons

$$R = \varphi(m) - a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right).$$

Dans R rejetons les puissances n des nombres divisibles par b ; raisonnant comme ci-dessus, il faudra rejeter de φm la somme

$$b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right), \text{ et dans } a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right),$$

il faut rejeter

$$a^n \left[b^n + (2b)^n + (3b)^n + \dots + \left(\frac{m}{ab} b\right)^n \right] = a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right);$$

il faut donc rejeter

$$b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right) - a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right).$$

Représentant le reste par R' , on obtient

$$R' = \varphi(m) - a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right) + a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right);$$

effaçant dans chacun des quatre termes ceux qui se rapportent au diviseur c , et désignant ce qui reste par R'' ,

on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} R'' &= \varphi(m) - a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right) - c^n \varphi\left(\frac{m}{c}\right) \\ &+ a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right) + a^n c^n \varphi\left(\frac{m}{ac}\right) + b^n c^n \varphi\left(\frac{m}{bc}\right) \\ &- a^n b^n c^n \varphi\left(\frac{m}{abc}\right), \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

Pour fixer les idées, supposons qu'il n'y ait que trois facteurs a, b, c ; alors R'' sera la somme cherchée. Désignons cette somme par S_n . On sait que l'on a

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= \frac{m^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} m^n + \frac{1}{2} n_1 B_1 m^{n-1} - \frac{1}{4} n_2 B_2 m^{n-2} \\ &+ \frac{1}{6} n_3 B_3 m^{n-3} - \dots, \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, n_3, \dots$ sont des coefficients binomiaux, et B_1, B_2, B_3 sont les nombres Bernoulliens.

Si nous remplaçons dans l'équation (1) $\varphi(m), \varphi\left(\frac{m}{a}\right), \dots$ par leurs développements, si nous ordonnons par rapport à m , nous obtiendrons

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{m^{n+1}}{n+1} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \\ &+ \frac{1}{2} n_1 B_1 m^{n-1} (1-a)(1-b)(1-c) \\ &- \frac{1}{4} n_2 B_2 m^{n-2} (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \\ &+ \frac{1}{6} n_3 B_3 m^{n-3} (1-a^3)(1-b^3)(1-c^3) \\ &- \dots \end{aligned}$$

Si n est pair, le dernier terme est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+2)} \frac{1}{n} n_{n-1} B_{n-1} m (1-a^{n-1})(1-b^{n-1})(1-c^{n-1}),$$

et le nombre des termes est

$$\frac{1}{2}(n+2);$$

si n est impair, le dernier terme est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{1}{n-1} n_{n-2} B_{n-2} m^2 (1-a^{n-2}) (1-b^{n-2}) (1-c^{n-2}),$$

et le nombre des termes est

$$\frac{1}{2}(n+1)$$

2. *Applications.* 1°. $n=0$; on a

$$S_0 = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

formule connue, trouvée par Euler, et qui indique combien il y a de nombres inférieurs et premiers à m (tome IV, page 75).

2°. $n=1$;

$$S_1 = \frac{1}{2} m^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

3°. $n=2$;

$$S_2 = \frac{1}{2} m^3 \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \\ + \frac{1}{6} m (1-a) (1-b) (1-c),$$

ou

$$S_2 = \frac{1}{3} m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \left(m^2 - \frac{1}{2} abc\right),$$

attendu que

$$B_1 = \frac{1}{6}.$$

4°. $n = 3$;

$$S_3 = \frac{1}{4} m^2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) \left(1 - \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) (m^2 - abc).$$

Soit $m = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; on a

$$S_0 = 16, \quad S_1 = 480, \quad S_2 = 19120, \quad S_3 = 856800.$$