

P. TARDY

Solution générale de la question 78

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 319-324

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 78

(voir t. II, p. 484) ,

PAR M. P. TARDY ,

Professeur de Mathématiques à Gênes.

Soit

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

et désignons par

$$\sum A_n^r [1, 2, 3, \dots, m]$$

la somme des quantités qu'on déduit de A_n^r en changeant

les signes à un nombre m des lettres $a_1, a_2, \dots, a_n$, et en faisant toutes les combinaisons possibles : le nombre de ces quantités sera évidemment égal à $\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}$, que nous représenterons, pour abrégér, par le symbole $\binom{n}{m}$.

Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S_n &= A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1, 2] - \dots \\ &+ (-1)^n \sum A_n^n[1, 2, \dots, n]; \end{aligned} \right.$$

il est clair qu'en développant, suivant les puissances de a_n , $\sum A_n^n[1, 2, \dots, m]$, nous aurons pour terme général

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left\{ \begin{aligned} &\sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2, \dots, m] \\ &+ (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2, \dots, (m-1)] \end{aligned} \right\},$$

excepté le cas de $m=n$, dans lequel nous obtiendrons seulement

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2, \dots, (n-1)].$$

Cela posé, le terme général, dans le développement de S_n , sera

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left[1 - (-1)^{n-p_1} \right] \left\{ \begin{aligned} &A_{n-1}^{p_1} - \sum A_{n-1}^{p_1}[1] + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2, \dots, (n-1)] \end{aligned} \right.$$

lequel deviendra évidemment égal à zéro toutes les fois que $n-p_1$ est un nombre pair, et si $n-p_1$ est impair,

il se réduira à .

$${}_2 \left(\begin{matrix} n \\ p_1 \end{matrix} \right) a_n^{n-p_1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n-1}^{p_1} - \sum A_{n-1}^{p_1} [1] + \dots \\ & + (-1)^{n-1} \sum A_{n-1}^{p_1} [1, 2, \dots, (n-1)] \end{aligned} \right\}.$$

Considérant la série entre parenthèses, nous aurons de même, pour terme général de son développement,

$${}_2 \left(\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right) a_{n-1}^{p_1-p_2} \left\{ \begin{aligned} & A_{n-2}^{p_2} - \sum A_{n-2}^{p_2} [1] + \dots \\ & + (-1)^{n-2} \sum A_{n-2}^{p_2} [1, 2, \dots, (n-2)] \end{aligned} \right\},$$

ou zéro, selon que $p_1 - p_2$ est impair ou pair.

Si nous continuons ainsi, et dans l'hypothèse que $n - p_1, p_1 - p_2, \dots, p_{\nu-1} - p_\mu$ soient tous des nombres impairs, il est clair que nous parviendrons à un terme général

$${}_2 \left(\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_\mu \end{matrix} \right) a_{n-\mu+1}^{p_{\mu-1}-p_\mu} \left\{ \begin{aligned} & A_{n-\mu}^{p_\mu} - \sum A_{n-\mu}^{p_\mu} [1] + \dots \\ & + (-1)^{n-\mu} \sum A_{n-\mu}^{p_\mu} [1, 2, \dots, (n-\mu)] \end{aligned} \right\},$$

dans lequel on aura $p_\mu = 1$.

Maintenant la quantité

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & A_{n-\mu} - \sum A_{n-\mu} [1] + \dots \\ & + (-1)^{n-\mu} \sum A_{n-\mu} [1, 2, \dots, (n-\mu)], \end{aligned} \right.$$

sera nulle, excepté dans le seul cas où $A_{n-\mu} = a_1$, c'est-à-dire $\mu = n - 1$. En effet, prenons une quelconque des lettres qui entrent dans $A_{n-\mu}$; elle se trouvera dans

$$\sum A_{n-\mu} [1, 2, \dots, m],$$

avec le signe positif un nombre de fois égal à celui des combinaisons qu'on peut faire avec $n - \mu - 1$ objets pris m à m , et avec le signe négatif un nombre de fois égal au nombre des combinaisons qu'on peut faire avec $n - \mu - 1$ objets pris $m - 1$ à $m - 1$, c'est-à-dire qu'elle sera multipliée par $\binom{n - \mu - 1}{m} - \binom{n - \mu - 1}{m - 1}$, et, par conséquent, dans l'expression (2), elle aura pour coefficient la série

$$1 - \binom{n - \mu - 1}{1} + \binom{n - \mu - 1}{2} - \dots + (-1)^{n - \mu - 1} \\ + 1 - \binom{n - \mu - 1}{1} + \dots - \binom{n - \mu - 1}{1} - (-1)^{n - \mu} \left\} = 2(1 - 1)^{n - \mu - 1} =$$

Mais si $\mu = n - 1$, la valeur de l'expression (2) devient $2a_1$. Or, pour arriver jusqu'à la quantité (2) avec $\mu = n - 1$, sans qu'aucun des termes généraux des développements précédents se soit évanoui, il faut que toutes les différences

$$p_{\mu-1} - p_{\mu}, \quad p_{\mu-2} - p_{\mu-1}, \dots, \quad p_2 - p_1, \quad n - p_1$$

soient égales à l'unité, c'est-à-dire qu'on ait $p_1 = n - 1$. De là nous pouvons conclure que dans le développement du second membre de l'équation (1), tous les termes qui contiennent des puissances de a_n supérieures à la première se détruisent, et il restera

$$S_n = 2n \cdot a_n \cdot S_{n-1}.$$

Par la même raison

$$S_{n-1} = 2(n-1) \cdot a_{n-1} \cdot S_{n-2},$$

$$S_{n-2} = 2(n-2) \cdot a_{n-2} \cdot S_{n-3},$$

$$\vdots$$

$$S_2 = 2 \cdot 2 a_2 \cdot S_1,$$

$$S_1 = 2 a_1.$$

En multipliant ces équations membre à membre, et

ôtant le facteur commun $S_{n-1} \cdot S_{n-2} \dots S_2 \cdot S_1$, il viendra

$$S_n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n;$$

puisqu'en général on a

$$\sum A_n^n [1, 2, \dots, m] = (-1)^n \sum A_n^n [1, 2, \dots, (n-m)],$$

l'équation (1) pourra s'écrire ainsi :

$$S_n = 2 \left\{ A_n^n - \sum A_n^n [1] + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right] \right\},$$

pour n impair, et

$$S_n = 2 \left\{ A_n^n - \sum A_n^n [1] + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n-2}{2} \right] \right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right]$$

pour n pair.

La quantité $\sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right]$ contient un nombre pair de termes, lesquels sont deux à deux égaux, et si nous indiquons par $\sum A_n^n \left[\bar{1}, 2, \dots, \frac{n}{2} \right]$ la somme de ces termes où parmi les $\frac{n}{2}$ lettres a prises négativement se trouve a_1 , nous aurons

$$\sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right] = 2 \sum A_n^n \left[\bar{1}, 2, \dots, \frac{n}{2} \right],$$

et, par conséquent, on obtiendra les formules (*)

$$2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots n \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_n = A_n^n - \sum A_n^n [1] + \sum A_n^n [1, 2] - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right]$$

(*) M. Cauchy a indiqué une démonstration de cette formule, *Comptes rendus*, 1840, 1^{er} semestre, page 569, et d'une manière plus développée dans le tome II des *Exercices*, page 141.

(324)

si n est impair, et

$$\begin{aligned}
 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots n \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_n &= A_n^n - \sum A_n^n [1] + \sum A_n^n [1, 2] - \dots \\
 &+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \dots, \frac{n-2}{2} \right] \\
 &+ (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n \left[\frac{n}{2}, 2, \dots, \frac{n}{2} \right]
 \end{aligned}$$

si n est pair.

Ainsi pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
 24 \cdot a_1 a_2 a_3 &= (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 \\
 &- (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_1 - a_3)^3;
 \end{aligned}$$

et, pour $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 192 \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4 \\
 &- (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^4 - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^4 \\
 &- (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^4 + (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^4 \\
 &+ (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^4 - (a_1 + a_4 - a_2 - a_1)^4.
 \end{aligned}$$
