

A. THIOLLIER

Solutions des questions 236 et 234

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 279-282

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__279_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 236 ET 234

(voir t. X, p. 183),

PAR M. A. THIOLLIER,

Élève du lycée Charlemagne; classe de M. Orsel.

Question 236.

Si $x^2 + 2ay^2$ est un carré, $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés.

En effet, soit $x^2 + 2ay^2 = z^2$,

$$y^2 = \frac{z^2 - x^2}{2a} = \frac{(z+x)(z-x)}{2a}.$$

Or on peut toujours supposer $z + x = 2am$, m étant quel-

conque; alors on a

$$y^2 = 2am^2 - 2mx,$$

par suite,

$$x^2 + ay^2 = x^2 + 2a^2m^2 - 2amx = (x^2 - 2amx + a^2m^2) + a^2m^2,$$

ou

$$x^2 + ay^2 = (x - am)^2 + (am)^2.$$

Donc $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés. C. Q. F. D.

Question 234.

Soit l'équation

$$(x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) \dots (x - a_{2n-1}) + b^m(x - a_2)(x - a_4)(x - a_6) \dots (x - a_{2n}) = 0,$$

b est un nombre positif; m est un nombre entier positif; les $2n - 1$ différences

$$a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_5, \dots, a_{2n-1} - a_{2n}$$

sont positives; les n racines de l'équation seront réelles et comprises entre a_1 et a_2 , a_3 et a_4 , a_5 et a_6 , ..., a_{2n-1} et a_{2n} . (RICHELOT.)

D'après la condition

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 \dots < a_{2n-1} < a_{2n},$$

si l'on donne à x les valeurs

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n-1},$$

la première partie de l'équation sera nulle, et si nous supposons que n soit pair, la fonction prendra d'abord le signe + pour $x = a_1$, puis le signe - pour $x = a_3$, et ainsi de suite alternativement. La fonction prendra les signes

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \dots -$$

correspondant à

$$x = a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots, a_{2n-1};$$

il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre chacun de ces n nombres.

Si, maintenant, on donne à x les valeurs $a_1, a_4, a_6, a_8, \dots, a_{2n}$, ce sera, au contraire, la seconde partie de l'équation qui deviendra nulle, et le premier terme sera négatif pour $x = a_2$, positif pour $x = a_4$, et ainsi de suite alternativement. La fonction prendra les signes

$$- + - + - + - + \dots +$$

correspondant à

$$x = a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \dots, a_{2n};$$

on peut donc écrire ainsi le tableau des variations de la fonction

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x = & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & \dots, & a_{2n-1}, & a_{2n}, \\ f(x) & +, & -, & -, & +, & +, & -, & -, & +, & \dots, & -, & +. \end{array}$$

La fonction change $n-1$ fois de signe; par suite, puisqu'il doit y avoir au moins une racine entre deux nombres donnant des résultats de signes contraires lorsqu'on les substitue dans la fonction, il y aura *une racine et une seule* entre a_1 et a_2 , a_3 et a_4 , a_5 et a_6 , $\dots$, a_{2n-1} et a_{2n} . C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on supposait n impair, on tomberait identiquement sur le même résultat; le raisonnement est absolument le même: il suffit d'observer que si, pour $x = a_p$ (p étant compris entre 1 et $2n$), la fonction prend le signe $+$ dans le premier cas, elle prendra le signe $-$ dans le deuxième, et réciproquement.

Le même élève énonce et démontre ces deux théorèmes de géométrie, dont le second est un corollaire du premier:

Soient une première sphère donnée et une seconde sphère passant par le centre de la première sphère; la zone de cette seconde sphère, interceptée par la première, a une aire constante, quel que soit le rayon de la seconde sphère.

Soient deux sphères données de même centre, et une troisième sphère passant par ce centre; la zone à deux bases, interceptée sur cette troisième sphère par les deux premières, a une aire indépendante du rayon de la troisième sphère.

Note. M. Ed. Terré, élève de la même classe, adresse le lieu géométrique d'une tangente commune à deux cercles dont les centres sont fixes, et dont les rayons sont liés par une équation linéaire. Le lieu est un système de quatre cercles. Nous donnerons prochainement ce beau travail, que son étendue nous oblige d'ajourner.