

LEBESGUE

Sur les surfaces orthogonales

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 265-274

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__265_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. LEBESGUE.

Définition. Si deux surfaces, ayant pour équations $u = 0$, $v = 0$, se coupent suivant certaines lignes c , c' , etc.; et lorsque, pour tous les points d'une de ces courbes, c par exemple, les plans tangents aux surfaces

(*) Pourquoi la nation ne fait-elle pas construire dans les environs de Paris un *observatoire-modèle*, à l'instar de celui de Pulkova? L'argent ne nous fait pas défaut pour atteindre le niveau astronomique de la Russie. Car nous consacrons bien des centaines de mille francs à publier des vignettes, des dessins de catacombes, etc. Les sites ne manquent pas non plus. On pourrait approprier à cette destination le château de Meudon, ou bien la tour dite *des Anglais* près Clamart. L'exactitude moderne exige que les murs du bâtiment soient abrités contre les commotions de la ville; et même ses habitants, les observateurs. Uranie est une déesse jalouse, imposant à ses fidèles un culte assidu, exclusif, une adoration perpétuelle.

sont perpendiculaires entre eux, les surfaces elles-mêmes sont dites *orthogonales*.

Remarque. Il peut se faire que l'orthogonalité ait lieu pour une courbe et non pour l'autre. Ainsi, il est aisé de former des équations de courbes qui se coupent perpendiculairement en un point, obliquement en un autre; telles seraient, par exemple, les courbes d'équations $y^2 = 2px$, $x^2 = 2qy$, toujours perpendiculaires à l'origine, et jamais au second point de rencontre. Si maintenant on les fait tourner autour d'une droite de leur plan, on aura deux surfaces de révolution, qui se couperont perpendiculairement sur le parallèle décrit par l'origine, et obliquement sur le parallèle décrit par le deuxième point d'intersection.

THÉORÈME I. *Pour que les surfaces $u = 0$, $v = 0$ soient orthogonales, il faut que les valeurs réelles $x = \varphi z$, $y = \psi z$, tirées de ces deux équations, rendent identiques l'équation*

$$(uv) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dv}{dz} = 0.$$

Démonstration. Si l'équation $(uv) = 0$ se réduisait à $\theta(z) = 0$, la perpendicularité aurait lieu aux points seuls de l'intersection déterminés par l'équation $\theta(z) = 0$; il faut donc que z disparaisse pour que la perpendicularité ait lieu sans discontinuité.

Exemples. Pour les surfaces

$$u = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0, \quad v = \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} - 1 = 0,$$

l'équation $(uv) = 0$ ne deviendra identique que moyennant les conditions $a - a' = b - b' = c - c'$, qui expriment que les sections principales ont les mêmes foyers.

Pour les surfaces

$$u = 2z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0, \quad v = 2z - \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} - c' = 0,$$

l'équation $(uv) = 0$ ne devient identique que par les conditions $a - a' = b - b' = c'$, qui expriment encore que les sections principales ont les mêmes foyers.

THÉORÈME II. *Si les surfaces $u = 0$, $v = 0$ sont orthogonales, l'équation $(uv) = 0$ entraîne cette autre $d(uv) = 0$, qui doit aussi devenir identique par l'élimination de x, y , au moyen des équations $u = 0$, $v = 0$.*

Démonstration. Cela résulte de ce que l'équation $(uv) = 0$ doit être aussi satisfaite par $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, en supposant les rapports de dx , dy , dz déterminés par les équations

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0, \quad \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = 0;$$

mais, comme cela doit avoir lieu, quel que soit z , z doit disparaître du résultat.

Remarque. Si les équations $u = 0$, $v = 0$, $(uv) = 0$, $d(uv) = 0$ s'accordaient sans que les deux dernières devinssent identiques par l'élimination de z , il faudrait en conclure seulement que la perpendicularité des plans tangents aurait lieu pour deux points consécutifs de l'intersection.

THÉORÈME III. *Si les deux surfaces $u = 0$, $v = 0$ sont orthogonales, et que la condition $d(uv) = 0$ se partage en ces deux autres,*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} d\left(\frac{du}{dz}\right) &= 0, \\ \frac{du}{dx} d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy} d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz} d\left(\frac{dv}{dz}\right) &= 0, \end{aligned}$$

qui, ainsi que $(uv) = 0$, deviennent identiques par l'élimination de x, y , les deux surfaces se couperont suivant une ligne qui sera, pour chaque surface, une ligne de courbure.

Démonstration. J'ignore si ce théorème remarquable

a déjà été donné, mais il se démontre en quelques mots : on a les équations

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} \cdot dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz &= 0, \\ \frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{du}{dz} &= 0, \\ \frac{dv}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} d\left(\frac{du}{dz}\right) &= 0.\end{aligned}$$

L'élimination de $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$ donne immédiatement

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & d\left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{du}{dy} dz - \frac{du}{dz} dy\right) \\ & + d\left(\frac{du}{dy}\right) \left(\frac{du}{dz} dx - \frac{du}{dx} dz\right) \\ & + d\left(\frac{du}{dz}\right) \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui n'est autre que l'équation des lignes de courbure sous la forme que lui a donnée M. Joachimsthal.

Remarque. Pour les surfaces orthogonales du second degré données plus haut, on reconnaît de suite que l'équation de condition $d(uv) = 0$ se partage comme il est indiqué plus haut; ainsi ces surfaces se coupent suivant des lignes de courbure. Je reviendrai plus loin sur cette remarque.

THÉORÈME IV. *Si deux surfaces orthogonales $u = 0$, $v = 0$, se coupent suivant une ligne de courbure de la surface $u = 0$, l'intersection sera aussi une ligne de courbure de la surface $v = 0$.*

Démonstration. On a ici l'équation (A) du théorème précédent; puis les équations

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz &= 0, \\ \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dv}{dz} &= 0,\end{aligned}$$

donnent

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dy} dz - \frac{du}{dz} dy} = \frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{du}{dz} dx - \frac{du}{dx} dz} = \frac{\frac{dv}{dz}}{\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx};$$

ce qui réduit l'équation (A) à

$$\frac{dv}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} d\left(\frac{du}{dz}\right) = 0;$$

par suite, on aura

$$\frac{du}{dx} d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy} d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz} d\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0.$$

De sorte que le théorème III mentionne que l'intersection est une ligne de courbure pour chaque surface.

THÉORÈME V. *Si trois surfaces, $u=0$, $v=0$, $w=0$, sont orthogonales deux à deux, les équations $d(uv)=0$, $d(vw)=0$, $d(wu)=0$ se partagent, comme il est dit plus haut, et les trois courbes d'intersection passant par le point m sont tangentes aux lignes de courbure relatives à ce point.*

Démonstration. La comparaison des équations

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0, \quad \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = 0,$$

à celles-ci :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dw}{dz} &= 0, \\ \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dw}{dz} &= 0, \end{aligned}$$

montre que les dx , dy , dz relatifs à l'intersection des surfaces $u=0$, $v=0$ sont proportionnels à $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$.

De même, pour l'intersection des surfaces $v=0$, $w=0$,

les dx , dy , dz seront proportionnels à $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$; et, pour l'intersection des surfaces $w=0$, $u=0$, les dx , dy , dz seront proportionnels à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$. Cela posé, dans le développement des équations

$$d(uv) = 0, \quad d(vw) = 0, \quad d(wu) = 0,$$

ou bien dans les équations

$$\begin{aligned} & \left[\frac{dv}{dx} \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) \right] \\ & + \left[\frac{du}{dx} \cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy} \cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz} \cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right) \right] = P + Q = 0, \\ & \left[\frac{dv}{dx} \cdot d\left(\frac{dw}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} \cdot d\left(\frac{dw}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} \cdot d\left(\frac{dw}{dz}\right) \right] \\ & + \left[\frac{dw}{dx} \cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{dw}{dy} \cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dw}{dz} \cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right) \right] = R + Q' = 0, \\ & \left[\frac{dw}{dx} \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dw}{dy} \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dw}{dz} \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) \right] \\ & + \left[\frac{du}{dx} \cdot d\left(\frac{dw}{dx}\right) + \frac{du}{dy} \cdot d\left(\frac{dw}{dy}\right) + \frac{du}{dz} \cdot d\left(\frac{dw}{dz}\right) \right] = P' + R' = 0, \end{aligned}$$

on reconnaît de suite que l'on a

$$P = P', \quad Q = Q', \quad R = R';$$

par suite

$$P + Q + R = 0,$$

d'où

$$R = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

On trouve, en effet, pour P,

$$\begin{aligned} & \frac{dv}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{dv}{dy} \frac{dw}{dy} + \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dz} \\ & + \frac{d^2 u}{dx dy} \left(\frac{dv}{dx} \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dy} \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d^2 u}{dx dz} \left(\frac{dv}{dx} \frac{dw}{dz} + \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dx} \right) \\ & + \frac{d^2 u}{dy dz} \left(\frac{dv}{dy} \frac{dw}{dz} + \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dy} \right) = 0; \end{aligned}$$

quant à P' , il ne diffère de P que par le changement de ν en w , et réciproquement, d'où il résulte que $P = P'$.

Puisque le partage des équations

$$d(uv) = 0, \quad d(vw) = 0, \quad d(wu) = 0,$$

a lieu au point m , on en conclura, par le théorème III, qu'en ce point les intersections sont tangentes aux lignes de courbure. Il n'est pas même nécessaire que les trois surfaces soient complètement orthogonales, il suffit que les équations $(uv) = 0$, $d(uv) = 0$, etc., aient lieu pour deux points consécutifs.

THÉORÈME VI. *Si l'on a trois séries continues de surfaces S_1, S_2, S_3 , qui soient orthogonales deux à deux, les intersections d'une surface déterminée s_1 , du premier groupe, par deux surfaces déterminées s_2, s_3 , des deux autres groupes, seront précisément les lignes de courbure de S_1 .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent; car, si l'on nomme $m, m', m'', \dots$, les points de rencontre des surfaces S_3 avec l'intersection de s_1, s_2 , on reconnaîtra que les points $m, m', m'', \dots$, appartiennent à une ligne de courbure des surfaces s_1, s_2 (*).

Ce théorème est de M. Dupin (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 239). Pour l'appliquer à la détermination des lignes de courbure, il faudrait, en prenant une série continue S_1 , contenant une surface donnée s_1 , déterminer les deux séries continues S_2, S_3 , orthogonales à S_1 , et, de plus, orthogonales entre elles. C'est une question difficile sur laquelle l'auteur se proposait de revenir (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 330). Il me semble que le théorème III doit être

(*) Dans une Note du tome VIII, p. 382 de ces *Annales*, j'ai mal énoncé et mal démontré cette proposition; les théorèmes V et VI serviront de rectification.

d'une application plus facile. M. Dupin a donné, pour les surfaces du second degré, les trois séries continues S_1, S_2, S_3 ; on lui doit aussi un théorème particulier pour déterminer les lignes de courbure des surfaces du second degré : *L'intersection de deux surfaces du second degré, trajectoires réciproques orthogonales, est précisément, pour l'une et pour l'autre, une des lignes de leur courbure.* (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 303.)

Or ce théorème est un cas particulier du théorème III.

Si l'on prend les deux systèmes

$$u = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0, \quad v = \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} - 1 = 0,$$

$$u = 2z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}, \quad v = 2z - \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} - c' = 0,$$

on reconnaît de suite que les équations

$$d\left(\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{du}{dx} \cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy} \cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz} \cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) = 0,$$

sont les mêmes en supprimant un facteur numérique constant. La même chose aurait encore lieu si, dans les équations, l'exposant 2 était remplacé par l'exposant m ; mais il est probable qu'alors les conditions qui servent à rendre $(uv) = 0$ identique, par l'élimination de x, y , seraient généralement trop nombreuses pour s'accorder.

Voici les équations au moyen desquelles il sera facile de discuter les lignes de courbure des surfaces du second degré, en supposant que ces lignes doivent passer par un point (α, β, γ) .

Pour la surface $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, et, par conséquent,

(273)

$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = 1$, on prendra la surface orthogonale

$\frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{c-u} = 1$, il en résultera

$$\frac{x^2}{a(a-u)} + \frac{y^2}{b(b-u)} + \frac{z^2}{c(c-u)} = 0,$$

qui revient à $(uv) = 0$; de là,

$$\frac{\alpha^2}{a(a-u)} + \frac{\beta^2}{b(b-u)} + \frac{\gamma^2}{c(c-u)} = 0,$$

et, par suite, en posant

$$2\rho = a + b + c - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

on aura

$$u^2 - 2\rho u + bc\frac{\alpha^2}{a} + ca\frac{\beta^2}{b} + ab\frac{\gamma^2}{c} = 0,$$

d'où

$$u = \rho \pm \sqrt{R};$$

mais, comme on a

$$\begin{aligned} R &= \rho^2 - \left(bc\frac{\alpha^2}{a} + ca\frac{\beta^2}{b} + ab\frac{\gamma^2}{c} \right) \\ &= (a-\rho)^2 - (b-a)(c-a)\frac{\alpha^2}{a} \\ &= (b-\rho)^2 - (c-b)(a-b)\frac{\beta^2}{b} \\ &= (c-\rho)^2 - (a-c)(b-c)\frac{\gamma^2}{c}, \end{aligned}$$

on reconnaîtra que R n'est jamais négatif; et si l'on représente par $R_1 = R_2 = R_3$, les trois dernières formes de R , on aura

$$a-u = a-\rho \mp \sqrt{R_1},$$

$$b-u = b-\rho \mp \sqrt{R_2},$$

$$c-u = c-\rho \mp \sqrt{R_3}.$$

J'ometts le reste de la discussion ; il sera bon de considérer à part chaque espèce de surface. Comme les deux surfaces orthogonales à la surface donnée sont orthogonales entre elles, on voit que les lignes de courbure se coupent à angle droit.

Pour la surface $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ et $2\gamma = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}$, en prenant la surface orthogonale

$$2z = \frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + u,$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{a(a-u)} + \frac{\beta^2}{b(b-u)} + 1 = 0,$$

et posant

$$2\rho = a + b + 2\gamma,$$

on aura

$$u^2 - 2\rho u + ab + b\frac{\alpha^2}{a} + a\frac{\beta^2}{b} = 0;$$

de là

$$u = \rho + \sqrt{R},$$

puis

$$\begin{aligned} R &= \rho^2 - \left(ab + b\frac{\alpha^2}{a} + a\frac{\beta^2}{b} \right) \\ &= (a - \rho)^2 + (a - b)\frac{\alpha^2}{a} \\ &= (b - \rho)^2 + (b - a)\frac{\beta^2}{b}, \end{aligned}$$

ou

$$R = R_1 = R_2,$$

et, par suite,

$$a - u = a - \rho \mp \sqrt{R_1}, \quad b - u = b - \rho \mp \sqrt{R_2}.$$

Dans la discussion, qui ne présente pas de difficulté, il sera bon de considérer à part chaque espèce de paraboloïde.