

A. GUILMIN

Nombres premiers relatifs

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 23-25

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__23_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES PREMIERS RELATIFS

(voir t. I. p. 466 ; t. IV, p. 77),

PAR M. A. GUILMIN,
Professeur.

PROBLÈME. *Trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre N et moindres que N .*

Lemme I. *Sil y a K nombres premiers avec un nombre A et moindres que A , il y a mK nombres premiers avec A et moindres que $m.A$.*

En effet, A' étant un nombre quelconque moindre que A , pour que $nA + A'$ soit premier avec A , il faut

et il suffit que A' soit premier avec A . Par suite, entre deux multiples consécutifs de A , nA et $(n+1)A$, il y a K nombres premiers avec A . Or, par hypothèse, de 0 à A il y a K nombres premiers avec A : de 0 à $2A$ il y en a donc $2K$, de 0 à $3A$ il y en a $3K$, ..., de 0 à mA il y en a mK .

Lemme II. A étant un nombre quelconque, et p un nombre premier absolu qui ne divise pas A , s'il y a K nombres premiers avec A et moindres que A , il y a $K(p-1)$ nombres premiers avec $A.p$ et moindres que Ap .

En effet, d'après le lemme I, il y a Kp nombres premiers avec A et moindres que Ap ; parmi ces Kp nombres, il nous faut supprimer les multiples de p premiers avec A et moindres que $A \times p$. Or, pour qu'un multiple $n \times p$ de p , soit premier avec A et moindre que A , il faut et il suffit que n soit premier avec A et moindre que A . Il nous suffit donc, pour obtenir les multiples en question, de multiplier successivement p par les K nombres qui sont premiers avec A et moindres que A . Si parmi les Kp nombres, ci-dessus indiqués, premiers avec A et moindres que $A \times p$, on supprime ces K multiples de p , il reste $Kp - K = K(p-1)$ nombres premiers avec $A \times p$ et moindres que $A \times p$.

Nous allons maintenant résoudre le problème proposé.

Décomposons N en ses facteurs premiers, et soit

$$N = a^n b^p c^q \dots$$

Tout nombre premier avec N est premier avec abc , et réciproquement; de sorte qu'il nous suffit de chercher combien il y a de nombres premiers avec abc et moindres que $N = abc \times a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} \dots$

Supposons qu'il y ait K nombres premiers avec abc et moindres que abc ; il y aura $K a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1}$ nombres

premiers avec abc et moindres que N (lemme I) ; il nous faut trouver K .

Il y a $a - 1$ nombres premiers avec a et moindres que a , savoir $1, 2, 3, \dots, a - 1$. Il y a donc $(a - 1) (b - 1)$ nombres premiers avec ab et moindres que ab (lemme II) ; il y a $(a - 1) (b - 1) (c - 1)$ nombres premiers avec abc et moindres que abc .

$K = (a - 1) (b - 1) (c - 1)$, et, par suite, le nombre demandé relatif à N est donc

$$(a - 1) (b - 1) (c - 1) a^{a-1} b^{b-1} c^{c-1}.$$

Note. Voir Gauss, *Disquisitiones*, § 38. Nous donnerons prochainement une formule, consignée dans Crelle, pour trouver la somme d'une fonction symétrique des nombres premiers à A et moindres que A . O. T.