

AMIOT

Sur l'approximation des calculs numériques par les décimales

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 238-257

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__238_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'APPROXIMATION DES CALCULS NUMÉRIQUES PAR LES DÉCIMALES ;

PAR M. AMIOT.

Professeur au lycée Saint-Louis.

1. Dans l'évaluation des quantités en décimales, il devient souvent inutile de considérer beaucoup de chiffres décimaux. Ainsi, dans les valeurs monétaires, on ne tient ordinairement compte que des centièmes; dans les mesures linéaires, que des millièmes, etc., parce qu'il n'existe pas de monnaie au-dessous du centime, ni de division du mètre inférieure au millimètre. Mais, quand il s'agit de déterminer, soit par le calcul, soit par l'expérience, des nombres qui doivent être soumis à des opérations, comme multiplication, division, etc., il importe de conserver un assez grand nombre de chiffres décimaux, pour peu que l'on tienne à quelque exactitude dans les résultats. Par exemple, quand on emploie le poids spécifique des corps pour déterminer leur volume connaissant leur poids, ou bien leur poids connaissant leur volume, on peut commettre,

sur le résultat, une erreur assez considérable, si l'on ne prend qu'un petit nombre de chiffres décimaux, et quelquefois même si l'on en prend le plus possible.

Un des principaux objets que nous nous proposons dans cette Note, c'est de montrer, à l'aide de simples considérations arithmétiques, l'utilité de conserver le plus possible de chiffres décimaux dans les résultats, toutes les fois que ceux-ci, soit qu'on les obtienne par le calcul ou l'observation, sont destinés à être soumis à des opérations d'arithmétique; et de tracer en même temps, sans qu'on soit obligé de recourir aux procédés algébriques, une marche certaine pour déterminer, dans chaque circonstance, ce qu'il y a de réellement exact dans les résultats des calculs auxquels on soumet ces nombres.

2. Nous commencerons par rappeler en peu de mots les procédés d'abréviation que l'on suit ordinairement dans chacune des opérations d'arithmétique, lorsque, les nombres proposés renfermant beaucoup de chiffres décimaux, on veut se contenter d'un résultat approché à moins d'une unité d'erreur d'un certain ordre décimal. Ensuite nous verrons comment les mêmes procédés peuvent conduire à déterminer quelle est la partie du résultat sur l'exactitude de laquelle on peut compter lorsque les nombres proposés ne sont eux-mêmes approximatifs qu'à une unité ou une demi-unité d'un certain ordre décimal.

3. On sait, et il est aisé de se convaincre, que pour obtenir la somme de plusieurs nombres décimaux à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre décimal, on prend d'abord des valeurs approchées de ces nombres à moins d'une demi-unité de l'ordre immédiatement inférieur; puis on additionne tous ces nombres, et l'on efface le dernier chiffre à droite de la somme, en ayant soin, toutefois, d'augmenter d'une unité le dernier chiffre restant, lorsque celui qu'on efface égale ou surpasse 5.

4. D'après cela, si un ou plusieurs des nombres donnés étaient approximatifs à moins d'une demi-unité d'un certain ordre décimal, il n'y aurait qu'à prendre de tous les nombres, des valeurs approchées au même degré que celui qui l'est le moins, et l'on serait ramené à opérer comme dans le cas précédent. Donc, règle générale :

Pour additionner plusieurs nombres approximatifs après avoir écrit le premier, je suppose, celui qui contient le moins de chiffres décimaux, conservez-en le même nombre dans tous les autres, et effectuez l'opération d'après la règle connue, puis effacez le dernier chiffre du résultat. De sorte que vous aurez autant de chiffres décimaux exacts moins un, qu'il y en a dans celui des nombres proposés qui en contient le moins.

Il est à remarquer, toutefois, que cette règle n'est applicable qu'au cas où l'on additionne moins d'une vingtaine de nombres. Autrement il faudrait effacer sur la droite du résultat un chiffre de plus pour chaque vingtaine de nombres additionnés.

5. Nous ne citerons la soustraction que pour mémoire, parce qu'il est évident que, si l'on soustrait deux nombres approchés à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre quelconque, le résultat sera lui-même approché à moins d'une demi-unité du même ordre.

6. Quant à la multiplication, on trouve, dans la plupart des Traités d'arithmétique (voyez *Arithmétique* de M. Bourdon, 15^e édition : *Note sur les approximations numériques*), une démonstration de la règle suivante :

Pour multiplier deux nombres l'un par l'autre à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre décimal donné, écrivez le multiplicateur au-dessous du multiplie-cande, en renversant l'ordre des chiffres du multiplicateur, et plaçant celui des unités sous le chiffre du multiplicateur de l'ordre immédiatement inférieur au degré d'ap-

proximation donné; multipliez ensuite successivement par chaque ordre d'unités du multiplicateur toute la partie du multiplicande placée à sa gauche, en commençant par le chiffre qui lui correspond, et ajoutez, au produit du premier chiffre, la retenue qui aurait été fournie par la multiplication du chiffre précédent; enfin, écrivez tous les produits partiels de telle façon que, le premier chiffre de chacun étant dans une même colonne verticale, tous les autres chiffres se correspondent; puis additionnez et effacez le premier chiffre à la droite du produit, en ayant soin d'augmenter d'une unité le premier chiffre restant, si celui qu'on efface égale ou surpasse 5. Il ne restera plus qu'à placer la virgule, ce qui est aisé d'après le degré d'approximation donné ou bien d'après l'ordre du dernier chiffre décimal qui est toujours facile à déterminer dans chaque cas.

Si les nombres proposés renfermaient un grand nombre de chiffres décimaux, ou même étaient illimités, comme une fraction périodique par exemple, on négligerait évidemment, dans l'opération, tous les chiffres de chaque facteur auxquels il n'y en a point de correspondant dans l'autre.

7. Supposons actuellement les deux facteurs approchés chacun à moins d'une demi-unité d'un certain ordre décimal. Il est évident qu'en multipliant tout le multiplicande par l'ordre d'unités le plus élevé du multiplicateur, le produit partiel que l'on obtiendra ne sera approché qu'à moins de quelques unités décimales d'un ordre qu'il sera aisé de déterminer dans chaque cas. On prendra donc, suivant la règle qu'on vient de tracer, des valeurs de tous les autres produits partiels approchées à moins d'une demi-unité du même ordre (4), puis on effectuera l'addition et on placera convenablement la virgule.

75,346 (1942)

Soient pour exemples les deux nombres 54,865 et 75,346 supposés approximatifs chacun à moins d'un demi-millième. J'écris d'abord ces nombres conformément

54865	à ce qu'on vient de dire, et j'effectue l'opération
64357	comme on le voit ci-contre. Pour placer
384055	la virgule j'observe que les millièmes du mul-
27432	tiplicande 5, multipliés par les dizaines du
1646	multiplicateur 7, donnent des centièmes; de
219	sorte que le chiffre effacé 4 étant des cen-
32	tièmes, le chiffre suivant 8 est des dixièmes,
413384	et partant le produit 4133,8 est approché à

moins d'un dixième d'erreur.

Lorsque les nombres proposés ne renferment pas le même nombre de chiffres, tant décimaux que non décimaux, c'est toujours celui qui en contient le moins que l'on prend pour multiplicande, afin de faire porter les erreurs d'approximation sur le premier chiffre de chaque produit partiel, que l'on supprime ensuite, et non sur le nombre de ces produits. Donc, règle générale :

Pour multiplier l'un par l'autre deux nombres approximatifs, prenez pour multiplicande celui qui contient le moins de chiffres; puis, écrivez le multiplicateur au-dessous, en renversant l'ordre de ses chiffres, et plaçant celui de l'ordre le plus élevé sous le premier, à droite du multiplicande; effectuez ensuite l'opération d'après la règle du n° 6, et placez enfin la virgule d'après l'ordre que doit représenter le premier chiffre, à droite du produit.

8. Appliquons cette règle à quelques exemples :

1°. Quel est le poids d'une certaine quantité d'acide sulfurique, dont le volume a été trouvé égal à 25^{lit}, 54, à moins d'un demi-centilitre d'erreur ?

25,54 Multiplions ce nombre par 1,8409, poids
90481 spécifique de l'acide sulfurique; j'ai 470, et,
 2554 comme le (0) exprime des dixièmes, j'ai
 2043 47,0 kilogrammes, à moins de 100 grammes
 102 d'erreur. Mais on peut se tromper de plusieurs
2 dizaines de grammes. Pour obtenir un plus
 470 haut degré d'exactitude, il aurait fallu mesurer le volume avec plus de précision. Toutefois, cette précision deviendrait elle-même illusoire, dès que le volume contiendrait plus de chiffres que le poids spécifique, ce qu'on peut voir dans l'exemple suivant :

2°. Quel est le poids d'un lingot d'argent pur, dont le volume a été trouvé égal à 1567^{cc},843, à moins d'un demi-millième d'erreur?

Le poids spécifique de l'argent étant 10,4743, je multiplie ce nombre par le volume donné, et
3.487651 j'observe que le chiffre 3 des millièmes du multiplicateur, ne correspondant à aucun chiffre du multiplicande, devient, ainsi que tous ceux qu'on aurait pu mettre à la droite, complètement inutile dans la multiplication (6). Pour placer la virgule, je remarque que le premier chiffre 8 du produit
164218 résultant de dix-millièmes multipliés par des mille, exprime des dixièmes, et, comme on l'efface, on a 16423 grammes ou 16^{kil},423 pour le poids demandé approximatif seulement à moins d'un gramme d'erreur. Et, chose remarquable, c'est qu'une fois le volume mesuré avec autant de chiffres qu'il y en a dans le poids spécifique, toute approximation plus grande dans la détermination du volume ne peut rien ajouter à celle du poids.

3°. Quelle est la quantité d'argent pur contenue dans

une ancienne pièce de 6 livres, dite aux trois couronnées ?

Je trouve, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, que cette pièce, au titre de 0,917, pèse 30^{es},594. Je multiplie l'un par l'autre ces deux nombres, qui ne

$$\begin{array}{r} 917 \\ 49503 \\ \hline 2751 \\ 46 \\ 8 \\ \hline 2805 \end{array}$$

peuvent être qu'approximatifs, à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre décimal. Je trouve pour produit 281, et, plaçant la virgule, j'ai enfin 28^{es},1, à moins d'un dixième de gramme d'erreur. Toutefois, on peut se tromper de plusieurs centièmes de grammes, ce qui peut avoir une certaine importance, surtout lorsque cette erreur peut se répéter un certain nombre de fois pour plusieurs pièces.

9. Passons à la division, et, comme ce sera encore du procédé par lequel on abrège ordinairement l'opération que nous déduirons nos règles d'approximation, et que d'ailleurs les Traités, de nous connus au moins, donnent plutôt de ce procédé une simple explication qu'une démonstration rigoureuse, nous commencerons par en exposer complètement une théorie nouvelle, basée sur le principe suivant :

Étant donnée une fraction proprement dite quelconque, si l'on augmente ou si l'on diminue le dénominateur d'un certain nombre, sans altérer le numérateur, la fraction subit elle-même une diminution ou une augmentation, laquelle est plus petite que le quotient du nombre dont on a augmenté ou diminué le dénominateur divisé par le dénominateur de la nouvelle fraction.

En effet, soit la fraction $\frac{7}{12}$, dont j'augmente le dénominateur de 2, par exemple ; j'aurai $\frac{7}{12+2}$, fraction plus petite que la proposée. Pour obtenir la différence

entre ces deux fractions, je les réduis au même dénominateur, et, en indiquant simplement les calculs, je trouve $\frac{7(12+2)}{12(12+2)}$ pour la première, et $\frac{7 \times 12}{12(12+2)}$ pour la seconde. Le numérateur de la première contient évidemment 7×2 de plus que celui de l'autre, et par conséquent la première surpasse la seconde de

$$\frac{7 \times 2}{12(12+2)} = \frac{7}{12} \times \frac{2}{12+2}.$$

Or, le premier facteur de ce produit $\frac{7}{12}$ est la fraction proposée, qui est par hypothèse < 1 ; si donc on divise la différence par ce facteur, le quotient $\frac{2}{12+2}$ sera plus grand que cette différence. Donc, enfin, l'augmentation de la fraction proposée sera plus petite que $\frac{2}{12+2}$. Ce qu'il fallait démontrer.

En général, soit $\frac{a}{b}$ une fraction proprement dite, et d la quantité dont on augmente ou dont on diminue le dénominateur, suivant que d est positif ou négatif, $\frac{a}{b+d}$ sera la nouvelle fraction, et si l'on appelle x la différence entre ces deux fractions, on a

$$x = \frac{a}{b} - \frac{a}{b+d} = \frac{a(b+d) - ab}{b(b+d)} = \frac{ad}{b(b+d)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{b+d}.$$

Et comme $\frac{a}{b} < 1$, évidemment en valeur absolue $x < \frac{d}{b+d}$, que d soit positif ou négatif. Donc, etc.

10. Pour appliquer ce principe, soient d'abord proposés les deux nombres 758275 et 5634, dont on demande

$$\begin{array}{r}
 758275 \\
 758300 \\
 1949 \\
 260 \\
 36 \\
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 6 \\
 5634 \\
 \hline
 1346
 \end{array} \right.$$

le quotient, à moins d'une unité d'erreur. Le dividende peut être décomposé en 758300-25, et nous pouvons ne considérer que la première partie, en négligeant la fraction $\frac{25}{5634} < \dots + \frac{1}{100}$ d'unité, dont le quotient se trouve augmenté.

La question étant ainsi ramenée à diviser 758300 par 5634, j'effectue, suivant la règle ordinaire, la division de 7583 centaines par 5634; je trouve pour quotient 1 et la fraction $\frac{1949}{5634}$ de centaine. En diminuant le dénominateur de cette fraction de 4, j'aurai $\frac{1949}{5630}$, avec une augmentation $< \frac{4}{5634}$, et à fortiori $< \frac{1}{1000}$ de centaine, ou $< \dots + \frac{1}{10}$ d'unité.

En consentant à cette erreur, je n'aurai qu'à diviser 19490 par 5630, ou, ce qui revient au même, 1949 par 563, pour avoir les dizaines du quotient. J'aurai ainsi 3 et la fraction $\frac{260}{563}$ de dizaine. En diminuant le dénominateur de 3, j'aurai $\frac{260}{560}$, avec une augmentation $< \frac{3}{560}$, ou à fortiori $< \frac{1}{100}$ de dizaine, ou bien $< \dots + \frac{1}{10}$ d'unité.

Pour avoir les unités, je divise 2600 par 560, ou 260 par 56, et je trouve 4 et la fraction $\frac{36}{56}$ d'unité. Cette fois j'augmente le dénominateur de 4, ce qui me donne $\frac{36}{60}$ avec une diminution $< \frac{4}{60}$, et, à fortiori, $< \dots + \frac{1}{10}$ d'unité.

Alors enfin je divise 360 par 60, ou 36 par 6, et j'obtiens un chiffre de dixièmes. On aura donc 134,6, ou plutôt 135 unités pour le quotient cherché à moins d'une unité d'erreur, puisque la somme de toutes les erreurs commises (plus petites respectivement que $+\frac{1}{100}$, $+\frac{1}{10}$, $+\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$) constitue à peine un ou deux dixièmes. On déduira aisément de ce raisonnement la règle générale suivante :

Pour obtenir le quotient de deux nombres entiers, à moins d'une unité simple d'erreur, effacez d'abord, sur la droite du dividende, autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur ; divisez ensuite, d'après la règle ordinaire, la partie conservée du dividende, puis continuez l'opération en effaçant, à chaque division partielle, un chiffre sur la droite du diviseur. Vous aurez ainsi un chiffre de trop au quotient, que vous effacerez en ayant soin d'augmenter d'une unité le chiffre précédent, si celui qu'on efface égale ou surpasse 5. On aura toujours le même soin d'augmenter d'une unité le dernier chiffre restant à la droite, soit du dividende, soit du diviseur, lorsque le chiffre suivant, qu'on suppose effacé, égalera ou surpassera 5.

11. En appliquant cette règle à un exemple quelconque, on verra, par le raisonnement qui précède, que, même dans les cas les plus défavorables, ceux où les premiers chiffres du diviseur sont très-petits, jamais aucune des fractions dont on altère successivement le quotient ne peut surpasser une assez petite fraction de l'unité du premier ordre. D'ailleurs, en général, une partie de ces erreurs augmente le quotient, tandis que les autres le diminuent, de sorte qu'en définitive, l'altération totale restera au-dessous d'une unité simple. Cependant, si les

nombres proposés renfermaient un grand nombre de chiffres, il pourrait arriver que la méthode abrégée donnât réellement une ou même plusieurs unités d'erreur au quotient. Ainsi, dans la division de 568987658964785637 par 1243242436, on trouve, en appliquant directement la méthode abrégée, 4576642858, ou plutôt 457664286, tandis que le quotient n'est réellement que 457664283 et une fraction. Mais de pareils cas sont fort rares, et, d'ailleurs, il suffirait alors de chercher le quotient avec deux chiffres de trop, en en conservant un de plus au premier dividende partiel, pour être bien sûr de ne pas commettre une unité d'erreur sur le premier ordre.

12. Passons maintenant au cas où l'on demande le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une unité d'erreur, d'un ordre décimal donné. On commence alors par effacer la virgule du diviseur, et par reculer celle du dividende d'autant de rangs sur la droite qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur, ce qui n'altère en rien le quotient; puis on réduit le dividende en unités décimales de l'ordre correspondant au degré d'approximation donné, et la question se trouve ramenée à déterminer le quotient de deux nombres entiers à moins d'une unité du premier ordre d'erreur. Soit proposé pour exemple de diviser 856,784 par 6,2785, à moins d'un millième d'erreur. Effaçant la virgule du diviseur et reculant celle du

8567840000	389	dividende de 4 rangs, j'ai
228934	62785	8567840 à diviser par 62785;
405790	1364631	je réduis le dividende en mil-
29080		lièmes, en mettant 3 (0) à la
3964		droite, et j'effectue enfin la
196		division de 8567840000 par
7		62785, ce qui me donne
1		1364631 pour quotient; effa-
		çant le dernier chiffre, et

séparant trois chiffres décimaux pour avoir des millièmes, j'ai enfin 136,463 pour le quotient demandé.

13. Appliquons la même règle à trouver le quotient de 38,5674, par 48,565 à moins de 0,01 d'erreur. On ramènera d'abord la question à diviser 3856740 par 48565 à moins d'une unité d'erreur. Ce diviseur ayant 5 chiffres, j'en efface 3 sur la droite du dividende; mais alors la partie restante 3856 ne contenant plus le diviseur, j'efface, sur la droite de celui-ci, assez de chiffres pour qu'une première division partielle soit possible, de sorte qu'en définitive je divise 3857 par 486, et j'ai pour quotient 792, ou plutôt 0,79, en supprimant le dernier chiffre, et plaçant la virgule. On doit remarquer que chaque division partielle donnant un chiffre, tout se réduit en définitive à conserver au diviseur autant de chiffres plus un, que l'on veut en avoir au quotient et au dividende assez pour contenir ce diviseur par plus de neuf fois. Or il est aisé, dans chaque cas, de déterminer combien le quotient doit contenir de chiffres: d'abord, le degré d'approximation donné indique le nombre de chiffres décimaux, et il n'y a qu'à multiplier le diviseur par 0,01 — 0,1 — 1 — 10 — 100... pour trouver celui d'unités entières. Donc, règle générale :

Pour trouver le quotient à moins d'une unité d'erreur d'un ordre décimal donné, de deux nombres décimaux, composés de beaucoup de chiffres ou même illimités, commencez par déterminer le nombre des chiffres du quotient, puis conservez-en un de plus sur la gauche du diviseur, et effacez sur la droite du dividende tous ceux qui ne font pas partie du premier dividende partiel; il ne reste plus alors qu'à effectuer l'opération d'après la méthode connue (12). Soit, par exemple, proposé de diviser 756,85463485463... par 27,5648756487... à moins de 0,001 d'erreur. Le diviseur, multiplié par 10, donne

un résultat plus petit que le dividende, tandis que, multiplié par 100, il en donne un plus grand. Le quotient aura donc 2 chiffres d'unités entières. On en veut 3 de décimales, c'est en tout 5. Je prends donc pour diviser les 6 premiers sur la gauche du diviseur proposé, et je divise 756855 par 275649. J'obtiens le quotient 274570, je supprime le dernier chiffre et j'en sépare 3 décimaux, ce qui me donne 27,457 pour le quotient cherché.

14. Passons, enfin, au cas où les nombres proposés sont eux-mêmes approximatifs chacun, à moins d'une demi-unité de son dernier ordre. Alors, on pourra les considérer comme étant chacun la partie qu'on aurait conservée de nombres décimaux illimités. Mais, pour plus de clarté, nous distinguerons deux cas :

1°. Si le dividende, abstraction faite des virgules, est plus grand que le diviseur, comme il résulte de la théorie de la division abrégée, qu'une erreur de quelques unités sur le dernier chiffre du diviseur ne peut avoir d'influence que sur le chiffre du quotient qu'on efface, on commencera par mettre un (0) à la droite du diviseur, puis on effacera, sur la droite du dividende, tous les chiffres qui ne feront pas partie du premier dividende partiel. On effectuera ensuite la division d'après la règle du n° 11, et l'on placera la virgule, en déterminant, comme on l'a dit au numéro précédent, combien le quotient doit avoir de chiffres d'unités entières.

Toutefois, on observera que, si le diviseur commençait par un chiffre au-dessous de 5, et que le quotient contint un assez grand nombre de chiffres, on devrait, pour être tout à fait sûr de l'exactitude des chiffres conservés, en effacer 2 sur la droite du quotient (11) ;

2°. Si, au contraire, le dividende est plus petit que le diviseur, toujours abstraction faite des virgules, on commencera par mettre un (0) à la droite du dividende, puis

on effacera sur la droite du diviseur, assez de chiffres pour rendre possible la première division partielle, et l'on sera ainsi ramené au cas précédent.

Soit, par exemple, à diviser 356,37694 par 2,47936, ces nombres étant supposés approximatifs chacun à une unité de son dernier ordre. Je mets (0) à la droite du diviseur, puis je néglige le dernier chiffre du dividende, et je divise 3563769 par 2479360. J'obtiens 14373, et comme le diviseur, multiplié par 100, donne un résultat plus petit que le dividende, tandis qu'il en donne un plus grand si on le multiplie par 1000, le quotient cherché sera 133,73 à moins d'un centième d'erreur.

Pareillement, pour diviser les deux nombres approximatifs 3,5678 par 4,1256842, je commence par mettre un (0) à la droite du dividende, puis je supprime les deux derniers chiffres à la droite du diviseur, et je divise 3567850 par 412568. Le quotient 864795 étant évidemment compris entre 1 et 0,1, sera 0,86479, à moins d'un cent-millième d'erreur.

15. Dans le cas où un seul des deux nombres serait approximatif et l'autre exact, on opérerait exactement de la même manière en mettant toutefois à la droite du nombre exact assez de (0) pour rendre possible une première division partielle.

Soit, par exemple, le nombre exact 547 à diviser par le nombre approximatif 8769. Je mets d'abord un (0) à la droite du diviseur, puis trois (0) à la droite du dividende, et je divise 547000 par 87690, ce qui me donne 62378, ou plutôt 6238; et, comme le quotient ne doit contenir ni unités ni dixièmes, on a 0,0623.

16. Nous terminerons par observer que, si l'un des nombres étant approximatif, l'autre était illimité, ou bien devait être déterminé soit par un calcul, soit par une expérience, il serait inutile de chercher un nombre

de chiffres plus considérable que ceux qui sont nécessaires pour satisfaire à la règle du numéro précédent, tous les autres ne pouvant avoir d'influence sur l'exactitude du résultat.

17. Faisons-en l'application à quelques questions numériques :

1°. Quel est le volume d'un tonneau rempli d'eau de mer, dont le poids a été obtenu égal à $1524^{kil},37$?

Le poids spécifique de l'eau de mer étant 1,0263, à moins d'un demi-dix-millième, je divise le nombre donné par celui-ci, ou plutôt, suivant la règle du n° 14, je divise 152437 par 102630, ce qui me donne 148521. Je dois effacer le dernier, ou même ici les deux derniers chiffres (11), et comme d'ailleurs le quotient est compris entre 1000 et 10000, j'ai enfin 1485 litres. On ne peut compter sur l'exactitude que des unités de litres, sans y pouvoir rien ajouter par une plus grande précision dans le poids donné.

2°. Quel est le volume de $846^{sr},34$ d'alcool pur?

La densité de ce liquide étant supposée 0,792, à moins d'un demi-millième d'erreur, je divise le premier de ces nombres par le deuxième, ou plutôt 8563 par 7920, et j'ai 108. Comme il faudrait séparer 4 chiffres non décimaux, et que, pour réduire en litres, il faut diviser par 1000, j'ai enfin $1^{lit},08$. Le dernier chiffre du poids a été inutile.

3°. Quel est le volume d'un ballon rempli d'un poids d'hydrogène égal à 525 grammes, dont le poids spécifique est 0,0688, ces deux nombres étant supposés approximatifs, à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre?

Je divise 5250 par 688, et j'ai 762 pour quotient; supprimant le dernier chiffre, et plaçant la virgule, j'ai 7,6. Pour trouver le volume en litres, je multiplie ce nombre

par 770, et j'ai un produit compris entre 5800 et 5900 ; ainsi, l'erreur peut bien être de près d'une centaine de litres.

Il est inutile de multiplier davantage les exemples pour montrer de quelle importance il peut être, dans certains cas, de trouver dans les Tables de poids spécifique, ou autres, les résultats écrits avec un grand nombre de chiffres décimaux.

18. On peut appliquer les mêmes principes à la détermination des racines carrées et cubiques des nombres approximatifs. Commençons par les racines carrées, et rappelons d'abord ce principe démontré dans tous les Traités d'Algèbre : *Quand on a obtenu la moitié plus un des chiffres d'une racine carrée, par la méthode générale, on obtiendra tous les autres en divisant le reste par le double de la partie trouvée de la racine.* En combinant ce principe avec celui de la division abrégée, on déterminera aisément, dans tous les cas, la partie exacte de la racine d'un nombre approximatif. Mais, pour plus de facilité, distinguons deux cas :

1°. *Si le nombre approximatif proposé contient un nombre pair de chiffres décimaux, extrayez la racine, comme si le nombre était exact; puis mettez un (0) à la droite du dernier reste, et effectuez la division abrégée de ce nombre par le double de la racine. Vous placerez la partie exacte de ce quotient à la droite de la racine déjà obtenue, et vous aurez la racine, à moins d'une unité d'erreur de son dernier ordre décimal.* Soit pour exemple le nombre approximatif 3,456783. Je trouve d'abord, par la méthode ordinaire, 1859 avec le reste 902. Je mets un (0) à la droite de ce nombre, et je divise 9020 par 3718, double de la racine, ce qui me donne 2435 ou 243, et, partant, j'ai, pour la racine cherchée, 1,859243.

2°. Si le nombre proposé contient un nombre impair de chiffres décimaux, commencez par mettre un (0) à la droite, et vous serez ramené au cas précédent. Seulement, il ne sera plus permis de mettre un nouveau (0) à la droite du dernier reste, et, pour rendre la première division partielle possible, vous devrez commencer par effacer le premier chiffre à la droite du diviseur. Soit pour exemple le nombre approximatif 5426,356; j'extrais la racine de 54263560, et j'ai 7366 avec le reste 5604. Je le divise par 14732, ou plutôt par 1473, et j'ai 381, de sorte que la racine cherchée égale 73,6381, à moins d'un cent-millième d'erreur.

19. Quant aux racines cubiques, on démontre pareillement que, si l'on a obtenu par la méthode générale plus de la moitié plus deux, des chiffres d'une racine cubique quelconque, on peut obtenir tous les autres en divisant le reste par trois fois le carré de la partie connue de la racine. De ce principe, combiné avec celui de la division abrégée, on a déduit la règle suivante, pour extraire la racine cubique d'un nombre approximatif :

1°. Si le nombre proposé contient un nombre de chiffres décimaux multiple de 3, on en extraira la racine cubique comme s'il était exact, puis on divisera le dernier reste par trois fois le carré de la racine trouvée, en ne cherchant de ce quotient qu'autant de chiffres moins trois qu'on en a déjà obtenu à la racine.

2°. Si le nombre proposé ne contient pas un nombre de chiffres décimaux multiple de 3, on commencera par ramener ce cas au précédent, en plaçant un ou bien deux (0) à la droite du nombre. Parce qu'en effet les deux derniers chiffres du nombre n'influent en rien ni sur la partie de la racine qu'on cherche par la méthode générale, ni sur celle qu'on obtient par la division abrégée, le quotient contenant toujours beaucoup plus de chiffres que l'on ne

doit en conserver. Appliquons cette règle à un exemple ; mais auparavant exposons, sur le procédé général de l'extraction des racines cubiques, une remarque qui n'a point encore été faite, du moins nous le pensons, et qui abrège considérablement les calculs de cette opération, surtout quand le nombre proposé contient beaucoup de chiffres.

20. On sait qu'à l'exception du premier, tous les chiffres d'une racine cubique s'obtiennent en divisant par trois fois le carré de la racine déjà obtenue, le reste correspondant suivi du premier chiffre de la tranche suivante. Pour vérifier ce chiffre, que l'on peut toujours considérer comme des unités, les autres étant des dizaines, et obtenir le nouveau reste, on peut former le cube de toute la racine, et le soustraire de toute la partie du nombre sur laquelle on a opéré ; mais on peut aussi former directement les trois parties $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (a désignant les dizaines, et b les unités) contenues dans le reste, et les en retrancher. Pour cela, on écrit, l'un au-dessous de l'autre, les trois nombres $3a^2$, $3ab$, b^2 (en les réduisant, au moyen de deux (0) pour le premier, et de un (0) pour le deuxième, en unités du premier ordre), puis on additionne ces trois nombres, et l'on multiplie la somme par b .

Le premier procédé est beaucoup plus long, et, cependant, on le préfère ordinairement parce que, dit-on, en formant le cube de la racine on a le carré, et, partant, on obtient aisément trois fois ce même carré qui sert à trouver le chiffre suivant. Mais, dans la deuxième manière, on peut aussi obtenir très-aisément trois fois ce carré (et c'est en cela que consiste notre remarque), en observant que

$$3(a+b)^2 = 3a^2 + 3 \cdot 2ab + 3b^2 = 3a^2 + 2 \cdot 3ab + 3 \cdot b^2.$$

Or, les trois nombres qu'on a additionnés dans l'opération précédente, étant $3a^2$, $3ab$ et b^2 , il suffit de multiplier respectivement ces trois nombres par 1, par 2

et par 3, et d'ajouter les trois résultats pour avoir trois fois le carré de la racine. Il en résulte une méthode d'opérer qui nous a paru remarquable, tant pour la symétrie des calculs et pour la facilité avec laquelle elle se démontre, que pour la simplification qu'elle introduit dans l'extraction des racines cubiques.

Pour en donner un exemple, ainsi que de la règle d'approximation, soit proposé d'extraire la racine cubique du nombre approximatif 57524,8567236. J'emets d'abord deux (0), et j'extrais la racine cubique de 57524856723600.

$$\begin{array}{r}
 30 \times 3 \times 8 = 90 \times 8 \\
 380 \times 3 \times 6 = 1140 \times 6 \\
 38600 \times 3 \times 2 = 115800 \times 2 \\
 57524856723600 \left\{ \begin{array}{l} 38602 \\ 2700 \ 1 \quad 2700 \\ 720 \ 2 \quad 1440 \\ 64 \ 3 \quad 192 \\ 3484 \quad 433200 \ 1 \\ 6840 \ 2 \\ 36 \ 3 \\ 440076 \end{array} \right. \\
 30524 \left\{ \begin{array}{l} 2700 \ 1 \quad 2700 \\ 720 \ 2 \quad 1440 \\ 64 \ 3 \quad 192 \\ 3484 \quad 433200 \ 1 \\ 6840 \ 2 \\ 36 \ 3 \\ 440076 \end{array} \right. \\
 2652856 \left\{ \begin{array}{l} 2700 \ 1 \quad 2700 \\ 720 \ 2 \quad 1440 \\ 64 \ 3 \quad 192 \\ 3484 \quad 433200 \ 1 \\ 6840 \ 2 \\ 36 \ 3 \\ 440076 \end{array} \right. \\
 12400723600 \left\{ \begin{array}{l} 2700 \ 1 \quad 2700 \\ 720 \ 2 \quad 1440 \\ 64 \ 3 \quad 192 \\ 3484 \quad 433200 \ 1 \\ 6840 \ 2 \\ 36 \ 3 \\ 440076 \end{array} \right. \\
 3460500392 \left\{ \begin{array}{l} 2700 \ 1 \quad 2700 \\ 720 \ 2 \quad 1440 \\ 64 \ 3 \quad 192 \\ 3484 \quad 433200 \ 1 \\ 6840 \ 2 \\ 36 \ 3 \\ 440076 \end{array} \right. \\
 \\
 \begin{array}{r}
 433200 \\
 13680 \\
 108 \\
 \hline
 4469880000 \ 1 \\
 231600 \ 2 \\
 4 \ 3 \\
 \hline
 4470111604 \\
 3460 \left\{ \begin{array}{l} 447 \\ 774 \\ 16 \end{array} \right. \\
 331 \\
 16
 \end{array}
 \end{array}$$

Racine = 38,60277.

Pour effectuer cette opération, j'ai d'abord pris la racine cubique du plus grand cube contenu dans 57, ce

qui m'a donné 3 avec le reste 30; à côté de ce reste, j'ai abaissé les trois chiffres suivants; j'ai séparé les deux derniers et j'ai divisé la partie de gauche 305 par 27, égal à trois fois le carré de la racine trouvée 3.

Le quotient étant supposé 8, pour le vérifier, je mets deux (0) à la droite de 27; j'écris au-dessous le produit $30 \times 3 \times 8$ et encore le carré de 8; j'additionne ces trois nombres; je multiplie la somme 3484 par 8, et je soustraie le produit de 30524; à la suite du reste 2652, j'abaisse les trois chiffres suivants du nombre, je sépare les deux derniers, et je divise la partie de gauche 26528 par trois fois le carré de 38. Pour obtenir ce diviseur, je place 1, 2 et 3 respectivement à droite des nombres 2700, 720 et 64, que je multiplie les uns par les autres; j'additionne les produits, et la somme 4332 est le diviseur cherché; la division de 26528 par 4322 me donne le quotient 6 avec le reste 12400, à la droite duquel j'abaisse les trois chiffres suivants.... En continuant d'opérer toujours exactement de la même manière, j'obtiens les cinq chiffres 38602 avec le reste 3460500392.

Après avoir obtenu cinq chiffres, on en peut avoir deux en divisant le reste par trois fois le carré de la racine $= 4470343212$. Comme on n'a besoin, au quotient, que de deux chiffres, je divise simplement 3460 par 467 et j'ai 77. Mettant le quotient 77 à la droite de la racine déjà obtenue, j'ai, enfin, 38,60277 pour la racine cherchée, à moins d'un cent-millième d'erreur.