

E. PROUHET

Solution de la question 196

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 198-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__198_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 196

(voir t. VII, p. 448);

PAR M. E. PROUHET.

L'énoncé doit être rectifié et complété comme il suit :

S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des termes de la suite des nombres naturels de 0 à n , on aura, si m est impair et plus grand que 1,

$$S_m = n^2 (n + 1)^2 \varphi [n (n + 1)] = u^2 \varphi (u),$$

en posant $n(n+1) = u$, et φ désignant une fonction entière.

A quoi j'ajouterai que si m est impair, on a

$$S_m = n(n+1)(2n+1)\varphi[n(n+1)] = u(2n+1)\varphi(u).$$

Démonstration. Le théorème de M. Jacobi se vérifie directement pour $m = 3, 5, 7$: il suffira donc de faire voir que, s'il est vrai jusqu'à un certain nombre impair, il le sera encore pour le nombre impair suivant.

Mais il nous faut auparavant établir une relation entre les sommes dont l'indice est de même *parité*.

On sait que pour une progression quelconque, dont a et l sont les termes extrêmes et h la raison, on a la formule

$$(P) \quad C_1^m h S_{m-1} + C_2^m h^2 S_{m-2} + \dots + C_{m-1}^m h^{m-1} S_1 + nh^m = (l+h)^m - a^m.$$

Si l'on change a, l, h respectivement en $l, a, -h$, ce qui revient à prendre les termes de la progression dans un autre ordre, S_1, S_2 , etc., conserveront la même valeur, et l'on aura

$$-C_1^m h S_{m-1} + C_2^m h^2 S_{m-2} + \dots \pm C_{m-1}^m h^{m-1} S_1 \mp nh^m = (a-h)^m - l^m;$$

d'où, en ajoutant cette formule à (P) et divisant par 2,

$$(R) \quad C_2^m h^2 S_{m-2} + C_4^m h^4 S_{m-4} + \dots = \frac{(a-h)^m + (l+h)^m - a^m - l^m}{2},$$

ce qui est la relation cherchée.

Si maintenant on suppose m impair, $a = 1, h = 1, l = n$, cette relation devient

$$C_2 S_{m-2} + C_4 S_{m-4} + \dots + C_{m-1}^m S_1 = \frac{(n+1)^m - 1 - n^m}{2},$$

ou

$$(N) \quad C_2 S_{m-2} + C_4 S_{m-4} + \dots + C_{m-3}^m S_3 = \frac{K}{2},$$

en renvoyant au second membre le terme $C_{m-1}^m S_1 = \frac{mn(n+1)}{2}$ et posant, pour abrégé,

$$K = (n+1)^m - 1 - n^m - mn(n+1).$$

On voit que K s'annule pour $n = 0$ et pour $n = -1$, et qu'il en est de même de sa dérivée

$$m(n+1)^{m-1} - mn^{m-1} - m(2n+1);$$

donc K est divisible par n^2 et par $(n+1)^2$.

Maintenant de $u = n(n+1)$ on tire

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1} \quad \text{et} \quad n+1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1},$$

ce qui réduit K à

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1}\right)^m - 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1}\right)^m - mu;$$

et, comme m a été supposé impair, on voit que les radicaux disparaîtront et que K se réduira à une fonction rationnelle et entière de u .

L'égalité (N) pourra donc se mettre sous la forme

$$C_2^m S_{m-2} + C_4^m S_{m-4} + \dots + C_{m-3}^m S_{m-3} = u^2 F(u),$$

d'où l'on tirera évidemment, pour S_{m-2} , une valeur de la forme $u^2 \varphi(u)$, si $S_3, S_5, \dots, S_{m-4}$ sont de cette forme.

Le théorème relatif au cas de m pair peut se démontrer d'une manière analogue, ou mieux encore au moyen de la relation

$$S'_{2p+1} = (2p+1)S_{2p},$$

conséquence de la formule (F') , donnée plus haut, page 188, et du théorème précédent, d'après lequel S'_{2p+1} ne peut évidemment renfermer de terme indépendant de n .
