

Méthodes pour trouver les valeurs approchées des racines réelles des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 174-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__174_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODES POUR TROUVER LES VALEURS APPROCHÉES DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.

Nota. L'une de ces méthodes se rapporte aux équations trinômes et l'autre aux équations générales; elles nous ont été indiquées par M. Piobert, avec une application à l'équation de M. Gauss traitée dans l'article précédent; il a bien voulu en permettre la publication.

Première méthode.

1. Soit l'équation

$$x^{m+n} + ex^n - f = 0.$$

Supposons $m > n$; faisant $m - n = p$, l'équation peut se mettre sous la forme

$$x^{m+n-p} + ex^{m-p} - fx^{-p} = 0;$$

or

$$m + n - p = 2n.$$

Et $m - p = n$; on a donc

$$x^{2n} + ex^n - fx^{-p} = 0.$$

Résolvant comme une équation du second degré, on obtient

$$x^n = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + fx^{-p}}.$$

Occupons-nous des racines positives. Si a est une limite supérieure de x , on a évidemment

$$x > \left(-\frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + fa^{-p}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

limite inférieure; en la substituant dans la valeur de x^n , on obtient une limite supérieure, et ainsi de suite.

2. *Équation de Gauss.* Soit

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0.$$

Il est évident qu'on doit avoir

$$28x^4 < 480; \text{ d'où } x < 2,0348;$$

et même $x < 2$. L'équation donnée peut prendre la forme

$$x^6 + 28x^3 = \frac{480}{x},$$

d'où

$$x = \left(-14 + \sqrt{196 + \frac{480}{x}} \right)^{\frac{1}{3}} = f(x).$$

Substituant dans $f(x)$ la limite supérieure 2, on a pour limite inférieure

$$1,902 < x,$$

et de là

$$1,9287 > x, \quad 1,9213 < x.$$

Ces substitutions successives donneraient des valeurs de

plus en plus approchées ; mais l'on peut accélérer l'opération à l'aide de cette observation : pour des points situés sur une droite, les variations des ordonnées sont constamment proportionnelles aux variations correspondantes des abscisses ; il en est de même pour de très-petits arcs de courbe. En d'autres termes, les variations de x et de $f(x)$, pour des limites très-resserrées, sont sensiblement proportionnelles. Or, nous voyons que x croissant de 1,902 à 1,9287, augmentant ainsi de 0,0267, $f(x)$ décroît de 1,9287 à 1,9213, ou de 0,0074. Si donc x devient $1,9287 - \delta$, alors $f(x)$ devient $1,9213 + \frac{74}{267} \delta = 1,9213 + 0,277 \delta$; or l'on doit avoir $x = f(x)$, ou

$$1,9287 - \delta = 1,9213 + 0,277 \delta ;$$

d'où l'on tire

$$\delta = \frac{0,0074}{1,277} = 0,0058,$$

et

$$x = 1,9287 - 0,0058 = 1,9229.$$

Cette valeur donne, pour une plus grande approximation,

$$f(x) = 1,9228798.$$

Or

$$1,9229 - 1,9228798 = 0,0000202.$$

Divisant par 1,277, on trouve

$$\delta = 0,00001582,$$

et

$$x = 1,9229 - 0,00001582 = 1,92288418.$$

Et, continuant à procéder de la même manière, on arrive à la valeur

$$x = 1,9228841303502,$$

beaucoup plus approchée que celle de M. Gauss.

3. *Racines négatives.* Faisant $x = -y$, il vient

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0;$$

d'où

$$y = \left(14 + \sqrt{196 - \frac{480}{y}} \right)^{\frac{1}{3}} = f(y);$$

on doit avoir

$$196 > \frac{480}{y}; \quad \text{d'où } y > 2,44897.$$

Le cube de cette quantité étant 14,68775, le radical doit être plus grand que

$$0,68775, \quad \text{ou } 196 - \frac{480}{y} > 0,473, \quad y > 2,4549.$$

D'un autre côté, on doit avoir

$$y < 28y^4, \quad \text{ou } y^3 < \sqrt[3]{28}, \quad y < 3,0368;$$

substituant $y = 3$, $f(y)$ se réduit à $\sqrt[3]{20}$; d'où

$$y < \sqrt[3]{20}; \quad \text{ou } y < 2,71442.$$

On trouve de même avec cette limite supérieure que $\frac{480}{y}$ ne peut descendre au-dessous de 177, et que y est $< 2,64$, et ensuite on parvient à $y < 2,61$. Ainsi les racines sont comprises entre 2,4549 et 2,61; ces deux limites se rapprochant peu l'une de l'autre, et toutes deux rendant $f(y) < y$, il convient d'essayer une valeur intermédiaire, telle que 2,5 qui donne $f(y) > y$: donc 2,5 est compris entre deux racines. En effet, ces racines sont

$$2,4580891142 \quad \text{et} \quad 2,5778034287.$$

Ainsi les dernières décimales données par M. Gauss sont trop fortes.

4. Par cette méthode, les premières approximations peuvent s'obtenir d'une manière très-expéditive, en em-

ployant la Règle à calcul; les dernières seules exigent l'emploi des Tables de logarithmes.

5. Ce procédé s'applique avec succès à beaucoup de cas; par exemple à l'équation suivante, qu'on rencontre dans les *Éléments d'Algèbre*,

$$9x^3 - 24x^2 + 16x - 0,001 = 0 :$$

les trois valeurs sont réelles, et deux diffèrent très-peu. La plus petite racine est donnée rapidement par les approximations suivantes :

$$a = \frac{0,001}{16} = 0,0000625;$$

$$a' = \frac{0,001 + 24a}{16} = 0,0000625585937;$$

$$a'' = \frac{0,001 + 24a' - 9a'^3}{16} = 0,0000625585936227.$$

Appliquant ensuite la méthode, on met la proposée sous la forme,

$$x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9} - \frac{0,001}{9x} = 0;$$

d'où

$$x = \frac{4}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{0,001}{x}}.$$

On obtient ainsi sans difficulté les deux racines voisines

$$1,3424 \quad \text{et} \quad 1,3242.$$

Seconde méthode.

6. Dans cette seconde méthode, on fait usage de la proposée non résolue, et l'on emploie les logarithmes et leurs différences, de manière à pousser très-loin les approximations par une seule substitution; mais pour cela il faut opérer avec plus de précision qu'on ne le fait ordinairement. En effet, dans les logarithmes donnés par les Tables, le septième chiffre n'étant exact qu'à une demi-unité près de cet ordre, le logarithme de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre

peut n'être exact qu'à $\frac{n}{2}$ unités du septième ordre décimal, ce qui est insuffisant.

De même la *différence* de deux logarithmes tabulaires, consécutifs, peut être en erreur de près d'une unité. Pour obvier à cet inconvénient, il faut, s'il est trop long de la calculer par les méthodes connues, prendre la différence de deux logarithmes comprenant entre eux celui qu'on considère, puis la diviser par le nombre de rangs qui les sépare, et qui, pour plus d'exactitude, doit être égal au nombre de termes de la série, après lesquels les différences tabulaires irrégulières reparaissent.

7. Cela posé, prenons l'exemple traité ci-dessus; on a trouvé pour valeur approchée de l'inconnue, $1,9229 = a$; substituant cette valeur dans la proposée, elle se réduit à $+0,01822$. Les différences des logarithmes, prises comme il a été indiqué, sont, pour les unités du quatrième ordre décimal,

$$\begin{array}{ll} 225,84 & \text{pour } a, \\ 1,1345 & \text{pour } 28a', \\ 4,465 & \text{pour } a'. \end{array}$$

Si $a + \delta$ est substitué dans la proposée à la place de x , δ exprimant aussi des unités du quatrième ordre décimal, cela revient à écrire :

$$7 \cdot \frac{225,84 \delta}{4,465} + 4 \cdot \frac{225,84 \delta}{1,1345} + 182,2 = 0;$$

d'où

$$\delta = -\frac{182,2}{1150,048} = -0,1585;$$

$$x = 1,9229 - 0,0001585 = 1,92288415.$$

Pour pousser l'approximation plus loin, on substitue dans la proposée le nombre $1,9228841$. Mais il faut avoir son logarithme, avec au moins 8 décimales; on le déduit de celui de $19229 = 7.41.67$, que l'on peut obtenir à 20

et même à 61 décimales au moyen des Tables auxiliaires placées à la suite des Tables de Callet; la proposée devient égale à

$$-0,00003491 \quad \text{et} \quad \delta = \frac{0,3491}{1150,048} = 0,0003035;$$

d'où

$$x = 1,92288413035 \quad \text{racine positive.}$$

8. *Première racine négative.* Le résultat de la substitution de 2,46, dans l'équation en y , donne $-0,2248$, et l'on en déduit $y = 2,458089$. Pour approcher davantage, il est nécessaire d'avoir le logarithme de cette valeur avec une grande exactitude; on le déduit de $244808 = 16.27.569$, et la substitution donne

$$+0,0000136;$$

par suite,

$$7 \cdot \frac{176,7\delta}{0,801} - 4 \cdot \frac{176,7\delta}{4,2483} + 0,136 = 0;$$

d'où

$$\delta = \frac{0,136}{119,52} = 0,00114, \quad \text{et} \quad y = 2,458089114.$$

9. *Deuxième racine négative.* D'après M. Gauss, cette racine est 2,5778036; pour pousser plus loin l'approximation, le logarithme de ce nombre se déduit de celui de $25775 = 25.1031$; la substitution donne

$$+0,0000234,$$

et l'on a

$$7 \cdot \frac{168,5\delta}{0,574} - 4 \cdot \frac{168,5\delta}{3,513} + 0,234 = 0;$$

d'où

$$\delta = -0,001713, \quad \text{et} \quad y = 2,5778034287.$$