

TERQUEM

Résolution numérique des équations trinômes, d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 165-174

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__165_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS TRINOMES,
D'APRÈS M. GAUSS.**

1. Le Mémoire de l'illustre analyste porte pour titre : *Beitrag zur theorie der algebraïschen gleichungen*; von Carl Friedric Gauss; Supplément à la Théorie des équations algébriques. Gottingue, 1849, 1 vol. in-4° de 34 pages. Extrait du tome IV des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Gottingue*.

Ce travail est divisé en deux parties : la première contient la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations, que l'auteur a donnée en 1799, et qu'il reproduit sous une nouvelle forme, avec des additions considérables. Cette démonstration est connue en France sous le nom de *Théorème de M. Cauchy*, qui a donné en effet une grande extension à la théorie de M. Gauss. C'est le sujet d'une belle thèse de M. Prouhet (voir *Nouvelles Annales*, tome I, page 438).

2. La seconde partie, la seule qui va nous occuper, est consacrée à la résolution des équations numériques de cette forme

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0.$$

m , n , e , f sont des nombres positifs donnés; m et n peuvent être quelconques : mais, sans nuire à la généralité, on admet que m et n sont des entiers, premiers entre eux. Cette forme renferme quatre cas ; mais, comme

on peut se borner à la recherche des racines *positives*,
on peut supprimer le cas où tous les signes sont positifs.

Faisons de plus, pour abréger, $\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$.

Première forme :

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0.$$

Introduisons un angle θ , à prendre dans le premier quadrant. A cet effet posons

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin^2 \theta, \quad \frac{ex^m}{f} = \cos^2 \theta,$$

d'où

$$x^{m+n} = f \sin^2 \theta, \quad x^m = \frac{f \cos^2 \theta}{e}, \quad x^n = e \tan^2 \theta.$$

Éliminant x , on obtient

$$\lambda = \frac{\sin^{2m} \theta}{\cos^{2m+2n} \theta},$$

équation qui sert à déterminer la valeur de θ . En faisant croître θ depuis 0 jusqu'à 90 degrés, on voit que le second membre de la dernière équation croît depuis 0 jusqu'à ∞ ; il existe donc une valeur et une valeur seulement, qui satisfait à l'équation: après qu'on aura trouvé θ , une quelconque des équations (1) donnera les valeurs de x .

Lorsque $\theta = 45$ degrés, on a $\lambda = 2^n$; donc, lorsque λ est moindre que 2^n , il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^n$, il faut chercher θ dans le second octant; on trouve la valeur de θ par la méthode indirecte connue.

Deuxième forme :

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0.$$

Posons

$$fx^{-m-n} = \sin^2 \theta, \quad ex^{-n} = \cos^2 \theta;$$

d'où

$$(1) \quad x^{m+n} = \frac{f}{\sin^2 \theta}, \quad x^n = \frac{e}{\cos^2 \theta}, \quad x^m = \frac{f \cot^2 \theta}{e},$$

et, éliminant x ,

$$\lambda = \frac{\sin^{2n} \theta}{\cos^{2m+2n} \theta}.$$

θ a une valeur réelle et n'en a qu'une seule.

Pour $\lambda < 2^m$, il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^m$, dans le second octant.

Troisième forme :

$$x^{m+n} - e x^m + f = 0.$$

Posons

$$\frac{x^n}{e} = \sin^2 \theta, \quad \frac{f x^{-m}}{e} = \cos^2 \theta,$$

d'où

$$(1) \quad x^{m+n} = f \tan^2 \theta, \quad x^m = \frac{f}{e \cos^2 \theta}, \quad x^n = e \sin^2 \theta,$$

et de là

$$\lambda = \cos^{2n} \theta \sin^{2m} \theta.$$

Le second membre s'annule en faisant $\theta = 0$ et en faisant $\theta = 90^\circ$; il existe donc un maximum entre 0 et 90 degrés.

Le logarithme de cette fonction est

$$2n \log \cos \theta + 2m \log \sin \theta;$$

la différentielle est

$$(2m \cot \theta - 2n \tan \theta) d\theta;$$

donc le maximum correspond à une valeur θ_1 telle, que l'on ait

$$\tan \theta_1 = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Ainsi, pendant que θ croît de 0 à θ_1 (moindre que 90 degrés), la fonction croît et atteint pour $\theta = \theta_1$, la plus grande valeur $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, et décroît de θ_1 à 90 degrés ou elle devient nulle; lorsque $\theta = 45^\circ$, la fonction est égale à $\frac{1}{2^{m+n}}$: donc on a toujours $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \frac{1}{2^{m+n}}$, à moins

que l'on ait $m = n$; dans ce cas, la valeur maximum devient égale à $\frac{1}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^{2m}}$.

On conclut de là, lorsque

$$\lambda > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

qu'aucune valeur de θ ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda = \cos^{2n} \theta \sin^{2m} \theta,$$

et, par conséquent, l'équation

$$x^{m+n} - e x^m + f = 0$$

n'a aucune racine (positive); et si

$$\lambda < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

cette équation a deux racines. Dans le cas spécial où

$$\lambda = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

les deux racines de l'équation deviennent égales, et, pour les trouver, on peut employer à volonté l'une quelconque des trois équations

$$x^{m+n} = \frac{f m}{n}, \quad x^m = \frac{f}{e} \frac{m+n}{n}, \quad x^n = \frac{e m}{m+n}.$$

Cas de deux racines. Si

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m < n$, les deux valeurs de θ sont dans le premier octant;

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m > n$, les deux valeurs de θ sont dans le deuxième octant;

$\lambda < \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est dans le premier octant et une dans le deuxième octant;

$\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est 45 degrés, et l'autre est dans le même octant que θ_1 .

On conclut facilement de l'analyse précédente des trois formes, que l'équation trinôme ne peut avoir plus de trois racines réelles, lorsque m et n n'ont pas de commun diviseur; ce qu'on sait aussi d'après d'autres principes.

3. Pour résoudre l'équation qui donne la valeur de θ_1 , on peut se servir des Tables de logarithmes trigonométriques; mais M. Gauss emploie des Tables auxiliaires extrêmement commodes, qu'il a inventées en 1810, et qui, très-répandues aujourd'hui en Allemagne et en Angleterre, sont encore inconnues en France, même de nos calculateurs de profession. Nous en parlerons très-incessamment; nous ne serions pas compris si nous rapportions aujourd'hui les calculs de M. Gauss, qu'il applique à la résolution de l'équation de la première forme

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{6750}{823543}, \quad \log \frac{1}{\lambda} = 2,0863825.$$

On a

$$\lambda < 8; \quad \text{donc} \quad \theta < 45^\circ.$$

On trouve

$$x = 1,9228841;$$

c'est la seule valeur positive.

Racines négatives.

Faisant $x = -\gamma$, il vient

$$\gamma^7 - 28\gamma^4 + 480 = 0,$$

équation de la troisième forme; on a

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750}, \quad \frac{7^7}{3^3 \cdot 4^4} = \frac{823543}{6912} < \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{\lambda} > 2^7 \quad \text{et} \quad m > n.$$

Ainsi l'on a le troisième cas, et il existe deux racines; on

trouve

$$y = 2,4580892, \quad y = 2,5778036.$$

Racines imaginaires.

4. Pour plus de généralité, on suppose que les coefficients sont des nombres *complexes*, et l'équation trinôme prend cette forme

$$(X) \quad x^{m+n} + e(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)x^m + f(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 0.$$

On admet encore que m et n sont premiers entre eux; e et f sont des nombres positifs. Si le coefficient de x^m est réel, alors on a

$$\varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 180^\circ;$$

de même, si la quantité toute connue est réelle, on a

$$\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = 180^\circ;$$

nous donnons aux racines la forme connue

$$r(\cos \rho + i \sin \rho).$$

Ordinairement on suppose que r est positif; mais pour notre but, il est plus avantageux de ne pas admettre cette supposition, mais d'admettre que ρ est compris entre 0 et 180 degrés. Lorsque les coefficients de l'équation (X) sont réels, le nombre de valeurs de ρ se réduit à moitié, car une des valeurs étant comprise entre 0 et 90 degrés, il faut prendre une autre racine $180^\circ - \rho$, et remplacer r par $-r$; à chaque racine $t + iu$ correspond une autre racine $t - iu$.

5. Divisant l'équation (X) par x^{m+n} , on obtient

$$1 + e(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)x^{-n} + f(\cos \varphi + i \sin \varphi)x^{-m-n} = 0;$$

remplaçant x par sa valeur $r(\cos \rho + i \sin \rho)$, on a

$$1 + er^{-n}[\cos(n\rho - \varepsilon) - i \sin(n\rho - \varepsilon)] \\ + fr^{-m-n}\{\cos[(m+n)\rho - \varphi] - i \sin[(m+n)\rho - \varphi]\} = 0.$$

Égalant à zéro, la partie imaginaire, on déduit une valeur de r^m en fonction de ρ .

Si l'on divise l'équation (X) successivement par son deuxième et son troisième terme en opérant comme ci-dessus, en égalant à zéro la partie imaginaire et réunissant les résultats, on obtient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^m = -\frac{f \sin[(m+n)\rho - \varphi]}{e \sin(n\rho - \varphi)}, \\ r^{m+n} = -\frac{f \sin(m\rho + \varepsilon - \varphi)}{\sin(n\rho - \varepsilon)}, \\ r^n = \frac{e \sin(m\rho + \varepsilon - \varphi)}{\sin[(m+n)\rho - \varphi]}; \end{array} \right.$$

chacune de ces équations est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Éliminant r entre deux quelconques d'entre elles, on a

$$(2) \quad \lambda = (-1)^{m+n} \frac{\sin^m(m\rho + \varepsilon - \varphi) \sin^n(n\rho - \varepsilon)}{\sin^{m+n}[(m+n)\rho - \varphi]}$$

ou

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}};$$

ainsi λ est essentiellement positif.

Cette équation détermine les diverses valeurs de ρ ; la valeur de r , qui correspond à chaque valeur de ρ , se trouve au moyen d'une des équations (1), de préférence de la deuxième équation, eu égard à la valeur absolue; toutefois, au cas où $m+n$ est pair, il faudra encore avoir recours à l'une des deux autres équations pour décider si r est positif ou négatif.

6. La solution de l'équation (2) s'obtient facilement par voie indirecte; à quoi peuvent contribuer les considérations suivantes :

1°. Les valeurs de ρ sont entre 0 et 180 degrés, et, au

cas où les coefficients sont réels, il suffit de chercher la moitié des valeurs, celles qui sont comprises entre 0 et 90 degrés.

2°. Dans l'un et dans l'autre cas, il faut sous-diviser l'intervalle de 0 à 90 ou à 180 degrés, au moyen des changements de signe qu'on observe dans les valeurs du second membre de l'équation (2), lorsque ρ parcourt toutes ses valeurs de 0 à 180 degrés; changements qui s'opèrent évidemment lorsque l'un des angles $m\rho + \varepsilon - \varphi$, $n\rho - \varepsilon$, $(m+n)\rho - \varphi$ devient divisible par 180 degrés, et alors cette fonction devient nulle ou infinie. On n'a pas besoin d'avoir égard aux valeurs négatives, puisque λ est essentiellement positif.

7. Cherchons les racines imaginaires de l'équation de ci-dessus,

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0;$$

on a

$$m = 4, \quad n = 3, \quad e = 28, \quad f = 480$$

et

$$\varepsilon = 0, \quad \varphi = 180^\circ.$$

Les équations (1) deviennent

$$r^4 = \frac{480 \sin 7\rho}{28 \sin 3\rho},$$

$$r^3 = -\frac{480 \sin 4\rho}{\sin 3\rho},$$

$$r^3 = -\frac{28 \sin 4\rho}{\sin 7\rho};$$

l'équation (2) donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750} = \frac{\sin^7 7\rho}{\sin^3 3\rho \sin^4 4\rho}.$$

L'équation a trois racines réelles et, par conséquent, quatre racines imaginaires. Il faut donc chercher deux valeurs de ρ comprises entre 0 et 90 degrés.

On forme facilement le tableau suivant des diverses

valeurs de la fonction en ρ , qui établissent des changements de signe,

$$\begin{aligned}\rho = 0^\circ \dots\dots\dots &+ \frac{823543}{6912} = \frac{7'}{3^3 \cdot 4^1}, \\ 25^\circ \frac{5}{7} \dots\dots\dots &+ 0, \\ 45^\circ \dots\dots\dots &- \infty, \\ 51^\circ \frac{3}{7} \dots\dots\dots &- 0, \\ 60^\circ \dots\dots\dots &+ \infty, \\ 77^\circ \frac{1}{7} \dots\dots\dots &- 0, \\ 90^\circ \dots\dots\dots &+ \infty;\end{aligned}$$

ainsi les deux valeurs de ρ sont comprises entre $51 \frac{3}{7}$ et 60 , et entre $77 \frac{1}{7}$ et 98 . L'auteur trouve pour première valeur,

$$\rho = 57^\circ 41' 41'', 366,$$

et, d'après la seconde équation (r'), on trouve

$$\begin{array}{l} \log \sin 4\rho = 9,8891425 \, n \quad (\text{La lettre } n \text{ désigne que le} \\ \text{compl. log sin } 3\rho = 0,9193523 \quad \text{nombre est négatif.)} \\ \log (-480) = 2,6812412 \, n \\ \hline 7 \log r = 3,4897360 \\ \log r = 0,4985337, \end{array}$$

et

$$x = + 1,6843159 + 2,6637914 \, i,$$

et aussi

$$x = + 1,6843159 - 2,6637914 \, i,$$

et la seconde valeur de $\rho = 86^\circ 19' 13'', 342$

$$\begin{array}{l} \log \sin 4\rho = 9,4049540 \, n \\ \text{compl. log sin } 3\rho = 0,0081108 \, n \\ \log (-480) = 2,6812412 \, n \\ \hline 7 \log r = 2,0943060 \, n \\ \log r = 0,2991866 \, n \end{array}$$

Si l'on veut que r soit positif, il suffit d'augmenter ρ de 180 degrés, et de prendre $\rho = 266^\circ 19' 13'', 342$.

8. Ainsi les sept racines de l'équation

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

sont

$$\begin{aligned} &+ 1,9228841 \\ &- 2,4580892 \\ &- 2,5778036 \\ &+ 1,6843159 \pm 2,6637914 i \\ &- 0,1278113 \pm 1,9874234 i \end{aligned}$$

La somme des racines est $+ 0,0000005$; ce qui s'accorde avec la vraie valeur (zéro) autant qu'on peut l'espérer, en faisant usage des Tables avec sept décimales; cherchant le logarithme du produit de ces racines, on trouve

$$2,6812411,$$

qui s'approche suffisamment du logarithme de 480.