

Note sur les déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 124-131

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851__1_10__124_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS.

1. *Notation.* u étant une fonction de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, nous désignons par u_p la dérivée de cette fonction prise par rapport à la variable x_p , par u_{pq} la dérivée u_p par rapport à la variable x_q , par u_{pqr} la dérivée de u_{pq} par rapport à la variable x_r , et ainsi de suite. $p, q, r, \dots$, sont des nombres quelconques de la suite naturelle 1, 2, 3, $\dots, n$. Ces dérivées portent aussi le nom de *coefficients différentiels partiels*, du premier, deuxième, troisième, etc., ordre. Nous empruntons cette notation commode à M. Hesse, célèbre professeur à Königsberg.

Observation. On sait que u_{pqr} reste le même, dans quelque ordre qu'on exécute les dérivations.

2. *Lemme.* u étant une fonction de n variables, le nombre des coefficients différentiels partiels d'ordre p est

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-1} = \frac{n(n+1) \cdot (p+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}.$$

Démonstration. Développons $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^p$, où u_1, u_2 , etc., désignent les dérivées premières de u , prise par rapport à $x_1, x_2, \dots$, conformément à la notation. Le premier terme est u_1^p ; remplaçons-le par u_{111} , le nombre des indices 1 étant p , nous obtenons un coefficient différentiel d'ordre p ; le second terme est $nu_1^{p-1}u_2$, remplaçons-le par u_{211111} le nombre des indices 1 étant $p-1$.

nous aurons un second coefficient différentiel d'ordre p ; opérant de même sur tous les termes, on obtient tous les coefficients d'ordre p ; on aura autant de ces coefficients qu'il y a de termes dans le développement. Le nombre de ces termes est celui qui est énoncé dans le lemme (voir tome I, page 89).

3. Soit u une fonction de deux variables x_1, x_2 ; cette fonction a trois coefficients différentiels du second ordre, savoir :

$$u_{11}, \quad u_{12}, \quad u_{22}.$$

Représentons la fonction $u_{11} x_1 + u_{12} x_2$ par P_1 , et la fonction $u_{21} x_1 + u_{22} x_2$ par P_2 ; de sorte que nous pouvons écrire

$$(1) \quad \begin{aligned} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 &= P_1, \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 &= P_2. \end{aligned}$$

Considérons x_1, x_2 comme deux inconnues de deux équations du premier degré; le déterminant de ces inconnues est $u_{11} u_{22} - u_{12}^2$, car $u_{12} = u_{21}$: c'est cette expression $u_{11} u_{22} - u_{12}^2$ que nous appelons le *premier déterminant* de la fonction u .

4. *Théorème.* Soient u une fonction à deux variables x_1, x_2 , et D le premier déterminant de cette fonction. Remplaçons x_1 par le binôme linéaire $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, et x_2 par le binôme linéaire $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$; la fonction u se changera en une fonction des deux variables y_1, y_2 . Soit Δ le premier déterminant de cette fonction v , on aura

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 D.$$

Démonstration. On a

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \\ x_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dy_1} &= \alpha_1, & \frac{dx_1}{dy_2} &= \alpha_2, & \frac{dx_2}{dy_1} &= \beta_1, & \frac{dx_2}{dy_2} &= \beta_2, \\ \frac{dv}{dy_1} &= v_1 = \frac{du}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{du}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2, \\ \frac{dv}{dy_2} &= v_2 = \frac{du}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{du}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2, \\ \frac{d^2v}{dy_1^2} &= v_{11} = \alpha_1^2 u_{11} + 2 \alpha_1 \alpha_2 u_{12} + \alpha_2^2 u_{22}, \\ \frac{d^2v}{dy_2^2} &= v_{22} = \beta_1^2 u_{11} + 2 \beta_1 \beta_2 u_{12} + \beta_2^2 u_{22}, \\ \frac{d^2v}{dy_1 dy_2} &= v_{12} = \alpha_1 \beta_1 u_{11} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) u_{12} + \alpha_2 \beta_2 u_{22},\end{aligned}$$

d'où

$$v_{11} v_{22} - v_{12}^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 (u_{11} u_{22} - u_{12}^2),$$

ou bien

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 D.$$

C. Q. F. D.

Observation. En considérant, dans les équations (2), y_1 et y_2 comme des inconnues, il est évident que le déterminant est $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$.

5. *Exemple.* Soit

$$u = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f;$$

il vient

$$\begin{aligned}u_1 &= 2ax_1 + bx_2 + d, & u_2 &= bx_1 + 2cx_2 + e, \\ u_{11} &= 2a, & u_{12} &= u_{21} = b, & u_{22} &= 2c;\end{aligned}$$

ainsi

$$D = 4ac - b^2.$$

Ainsi, ce qu'on désigne par m dans la théorie des coniques, est le *premier déterminant* de la fonction hexanôme, laquelle, étant égalée à zéro, donne l'équation de

la conique. En remplaçant, dans l'équation, x_1 et x_2 , respectivement par $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ et $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$, on obtient une seconde conique qui est la transformée *homologique* de la première conique, et l'on a

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 D;$$

par conséquent, la seconde conique est toujours de même espèce que la première; mais on peut transformer une ellipse en cercle et une hyperbole en *hyperbole* (*).

Les changements de coordonnées sont des cas particuliers des transformations homologiques; en passant des coordonnées rectangulaires à d'autres coordonnées rectangulaires, on a

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = 1;$$

ainsi le déterminant ne change pas de valeur.

6. Soit u une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3 ; cette fonction a six coefficients différentiels du second ordre, savoir : $u_{11}, u_{12}, u_{13}; u_{22}, u_{23}, u_{33}$. Posons

$$(3) \quad \begin{cases} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = P_1, \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = P_2, \\ u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{33} x_3 = P_3; \end{cases}$$

considérant x_1, x_2, x_3 comme trois inconnues de trois équations du premier degré, et résolvant ces équations, le dénominateur des inconnues est ce qu'on nomme le *déterminant* de la fonction u ; désignant ce dénominateur par D , l'on a, comme on sait,

$$D = u_{11} u_{22} u_{33} + 2 u_{12} u_{13} u_{23} - u_{11} u_{23}^2 - u_{22} u_{13}^2 - u_{33} u_{12}^2.$$

7. THÉORÈME. Soit u une fonction de trois variables

(*) Hyperbole équilatère (voir t. V, p. 535).

x_1, x_2, x_3 ; posons

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3, \\ x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3, \\ x_3 = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3, \end{cases}$$

la fonction u se change en une fonction v à trois variables y_1, y_2, y_3 . Soit Δ le déterminant de cette fonction v ; on aura

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \\ \quad + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1)^2 D. \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{du}{dy_1} = \frac{du}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{du}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} + \frac{du}{dx_3} \frac{dx_3}{dy_1} = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3, \\ v_{11} &= \alpha_1^2 u_{11} + \beta_1^2 u_{22} + \gamma_1^2 u_{33} + 2 \alpha_1 \beta_1 u_{12} \\ &\quad + 2 \alpha_1 \gamma_1 u_{13} + 2 \beta_1 \gamma_1 u_{23}, \\ v_{12} &= \alpha_1 \alpha_2 u_{11} + \beta_1 \beta_2 u_{22} + \gamma_1 \gamma_2 u_{33} + [\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2] u_{12} + [\alpha_1 \gamma_2 \\ &\quad + \gamma_1 \alpha_2] u_{13} + [\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2] u_{23}, \\ v_{13} &= \alpha_1 \alpha_3 u_{11} + \beta_1 \beta_3 u_{22} + \gamma_1 \gamma_3 u_{33} + u_{12} [\alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3] \\ &\quad + u_{13} [\alpha_1 \gamma_3 + \gamma_1 \alpha_3] + u_{23} [\beta_1 \gamma_3 + \gamma_1 \beta_3]. \end{aligned}$$

On trouve de même $v_2, v_{22}, v_{23}, v_{33}$; substituant dans le déterminant Δ les valeurs de v en fonction de u , on trouve l'équation (5) qu'on peut écrire de cette manière

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] = [\alpha_1 \ \beta_2 \ \gamma_3]^2 [u_1 \ u_2 \ u_3],$$

les crochets désignant des déterminants.

8. *Exemple.* Soient

$$u = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 + dx_1 x_3 + ex_2 x_3 + fx_3^2,$$

$$u_1 = 2ax_1 + bx_2 + dx_3,$$

$$u_{11} = 2a,$$

$$u_{12} = b,$$

$$u_{13} = d,$$

et, de même,

$$u_{22} = 2c, \quad u_{23} = e, \quad u_{33} = 2f,$$

$$D = 8acf + 4bde - 2ae^2 - 2cd^2 - 2fb^2 = 2L.$$

Ainsi, dans nos *relations d'identité*, ce que nous avons appelé *m* est le *premier déterminant* de la fonction hexagone du second degré à deux variables, et ce que nous avons nommé *L* est la moitié du *second déterminant* de la même fonction rendue homogène et ternaire.

En transformant une conique homologiquement, $\frac{L}{m}$ ne change donc pas.

Soient encore

$$u = A'x_1^2 + A''x_2^2 + A'''x_3^2 + 2B'''x_1x_2 + 2B''x_1x_3 + 2B'x_2x_3 \\ + 2C'x_1 + 2C''x_2 + 2C'''x_3 + E;$$

$$u_1 = 2A'x_1 + 2B'''x_2 + 2B''x_3 + 2C',$$

$$u_{11} = 2A', \quad u_{12} = 2B''', \quad u_{13} = 2B'',$$

$$u_{22} = 2A'', \quad u_{23} = 2B', \quad u_{33} = 2A''';$$

d'où

$$D = 8[A'A''A''' + 2B'B''B''' - A'B'^2 - A''B''^2 - A'''B'''^2].$$

C'est le *premier déterminant* relatif aux équations des surfaces du second degré, et le *second déterminant* des équations des lignes du second. *D*, pris négativement, jouit des propriétés analogues à *m* : ainsi, lorsque *D* est nul, le centre est à l'infini ; lorsque *D* est positif, la surface est toujours infinie.

9. THÉOREME GÉNÉRAL. Soit *u* une fonction de *n* variables $x_1, x_2, \dots, x_n$; posons

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n,$$

$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n,$$

$$\vdots$$

$$x_n = \tau_1 y_1 + \tau_2 y_2 + \dots + \tau_n y_n;$$

la fonction se change en une fonction ν à n variables $y_1, y_2, \dots, y_n$. Désignant par $[u_{11} u_{22} \dots u_{nn}]$, $[\nu_{11} \nu_{22} \dots \nu_{nn}]$, $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]$ les déterminants de u , ν , et des coefficients $\alpha_{12}, \beta_1, \dots, \tau_1$, on a

$$[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{nn}] = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^2 [u_1 u_2 \dots u_{nn}].$$

Démonstration. La même que ci-dessus pour trois variables.

10. Exemple.

$$u = A x_1^2 + A' x_2^2 + A'' x_3^2 + E x_4^2 + 2 B x_2 x_1 + 2 B' x_1 x_3 \\ + 2 B'' x_1 x_2 + 2 C x_1 x_4 + 2 C' x_2 x_4 + 2 C'' x_3 x_4.$$

Calcul fait, on trouve pour le déterminant de quatre variables,

$$D = u_{11} u_{22} u_{33} u_{44} - P + Q - R + S,$$

$$P = u_{33} u_{44} u_{11}^2 + u_{22} u_{44} u_{13}^2 + u_{22} u_{33} u_{14}^2 + u_{11} u_{44} u_{23}^2 \\ + u_{11} u_{33} u_{24}^2 + u_{11} u_{22} u_{34}^2,$$

$$Q = u_{12}^2 u_{34}^2 + u_{13}^2 u_{24}^2 + u_{14}^2 u_{23}^2,$$

$$R = 2 [u_{12} u_{23} u_{34} u_{14} + u_{12} u_{24} u_{43} u_{13} + u_{13} u_{32} u_{24} u_{41}],$$

$$S = 2 [u_{11} u_{23} u_{24} u_{34} + u_{22} u_{13} u_{14} u_{34} + u_{33} u_{12} u_{14} u_{24} + u_{44} u_{13} u_{12} u_{23}];$$

$$u_1 = 2 A x_1 + 2 B' x_3 + 2 B'' x_2 + 2 C x_4,$$

$$u_2 = 2 A' x_2 + 2 B x_3 + 2 B'' x_1 + 2 C' x_4,$$

$$u_3 = 2 A'' x_3 + 2 B x_2 + 2 B' x_1 + 2 C'' x_4,$$

$$u_4 = 2 E x_4 + 2 C x_1 + 2 C' x_2 + 2 C'' x_3,$$

$$u_{11} = 2 A, \quad u_{12} = 2 B'', \quad u_{13} = 2 B', \quad u_{14} = 2 C, \quad u_{22} = 2 A',$$

$$u_{23} = 2 B, \quad u_{24} = 2 C', \quad u_{33} = 2 A'', \quad u_{34} = 2 C'', \quad u_{44} = 2 E,$$

$$u_{11} u_{22} u_{33} u_{44} = 16 A A' A'' E;$$

$$P = 16 [A A' C''^2 + A A'' C'^2 + A' B^2 + A' A'' C^2 + A' E B'^2 + A'' E B''^2],$$

$$Q = 16 [B' C^2 + B'^2 C'^2 + B''^2 C''^2],$$

$$R = 32 [B B'' C C'' + B B' C C' + B' B'' C' C''],$$

$$S = 32 [A B C' C'' + A' B' C C'' + A'' B'' C C' + E B B' B''];$$

c'est le déterminant de la fonction décanôme à trois variables rendue homogène et quaternaire. Ce *second déterminant* D jouit des mêmes propriétés pour les surfaces du second degré que ce que nous avons nommé L pour les lignes du second degré. C'est ce que nous verrons dans nos *relations d'identité*, appliquées aux surfaces du second degré. La plupart de ces relations ont été énoncées pour les formes quadratiques à deux variables par l'illustre M. Gauss (*Disquisitiones*, § 267); si je n'en ai pas averti plus tôt, c'est que, par inadvertance, je ne m'en suis aperçu que récemment, à cause de la différence de notation. Lorsque la fonction u dépasse le second degré, nous verrons que le *déterminant* est toujours le résultat d'une élimination entre des équations de degrés de plus en plus élevés.

Dans les lignes du second degré, il suffit de connaître les deux déterminants pour avoir le produit des axes principaux et par conséquent l'aire de l'ellipse; de même dans les surfaces du second degré, les deux déterminants donnent le produit des trois axes principaux et le volume de l'ellipsoïde. Les déterminants (fonctions cramériennes) dominent aujourd'hui toute la science mathématique. C'est donc avec raison qu'on les a ôtés du nouvel enseignement. On les a fructueusement remplacés par *le plan auxiliaire, le logarithme, le travail élémentaire*; triade adorable, sans oublier la règlette de saint Gunther que tout géomètre est tenu d'avoir incessamment dans ses poches ou dans ses mains. Nous verrons renaître l'ère des Archimèdes et des Apollonius :

Magnus ab integro seclorum nascitur ordo.
