

F. HÉMENT

**Théorème de M. Steiner, sur les axes
rectangulaires, dans les surfaces
du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 119-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__119_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**THEOREME DE M. STEINER, SUR LES AXES RECTANGULAIRES,
DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ**

(voir t. IX, p. 407).

PAR M. F. HÉMENT,
Professeur au lycée de Strasbourg.

1. Le théorème de M. Steiner sur les axes rectangulaires dans les coniques peut être démontré ainsi :

Prenant pour axes les deux droites rectangulaires, l'équation de la conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En faisant successivement $x = 0, y = 0$, on obtient

$$Ay^2 + Dy + F = 0,$$

$$\bullet \quad Cx^2 + Ex + F = 0,$$

équations qui donnent les segments des droites a et b ; on a donc

$$x'x'' = \frac{F}{C}, \quad y'y'' = \frac{F}{A},$$

$$x'^2x''^2 = \frac{F^2}{C^2}, \quad y'^2y''^2 = \frac{F^2}{A^2}.$$

Les racines étant de signes contraires, on a

$$a = x' - x'' = \frac{\sqrt{E^2 - 4CF}}{C},$$

$$b = y' - y'' = \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{A},$$

$$a^2 = \frac{E^2 - 4CF}{C^2}, \quad b^2 = \frac{D^2 - 4AF}{A^2},$$

et enfin

$$\frac{a^2}{x'^2x''^2} + \frac{b^2}{y'^2y''^2} = \frac{E^2 - 4CF + D^2 - 4AF}{F^2},$$

quantité constante; car, comme les deux axes rectangulaires sont quelconques, on peut généraliser en changeant leur direction. On a alors

$$D'^2 = (D \sin \alpha + E \cos \alpha)^2,$$

$$E'^2 = (D \cos \alpha - E \sin \alpha)^2,$$

$$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2,$$

$$A' = A \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha,$$

$$C' = A \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha,$$

$$A' + C' = A + C,$$

F est le même ; donc

$$\frac{D^2 + E^2 - 4F(A + C)}{F^2} = \frac{D'^2 + E'^2 - 4F(A' + C')}{F'^2}.$$

2. Quant au théorème général, en prenant pour axes les trois droites rectangulaires, on a pour équation de la surface

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gz + A'yx + Kx + L = 0.$$

En faisant successivement

$$(x = 0, y = 0), \quad (y = 0, z = 0), \quad (x = 0, z = 0),$$

on obtient

$$Ax^2 + Bz + L = 0,$$

$$Cx^2 + Kx + L = 0,$$

$$By^2 + Hy + L = 0,$$

équations qui donnent les segments des droites a, b, c ; on a donc

$$a^2 = \frac{G^2 - 4AL}{A^2}, \quad x'^2 x''^2 = \frac{L^2}{A^2},$$

$$b^2 = \frac{K^2 - 4CL}{C^2}, \quad y'^2 y''^2 = \frac{L^2}{C^2},$$

$$c^2 = \frac{H^2 - 4BL}{B^2}, \quad z'^2 z''^2 = \frac{L^2}{B^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2} + \frac{c^2}{z'^2 z''^2} \\ &= \frac{G^2 + K^2 + H^2 - 4AL - 4CL - 4BL}{L^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Si l'on prend, en effet, d'autres axes rectangulaires, on obtient

$$A' + B' + C' = A + B + C,$$

$$G'^2 + K'^2 + H'^2 = G^2 + H^2 + K^2,$$

en faisant attention aux relations connues qui existent entre les cosinus des angles que les nouveaux axes font avec les anciens : d'ailleurs L ne change pas ; donc

$$\begin{aligned} & \frac{D'^2 + E'^2 + F'^2 - 4L(A' + B' + C')}{L^2} \\ &= \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4L(A + B + C)}{L^2}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Note. $\frac{1}{x'x''} + \frac{1}{y'y''} + \frac{1}{z'z''} = \text{const.}$
