NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JAUFROID

Solution de la question 213

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 73-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__73_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 213

(voir t. VIII, p. 392) ;

PAR M. JAUFROID,
Bachelier ès sciences mathématiques.

$$\mathrm{l}.(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ou

$$a_n = -\frac{\mathrm{S}(n)}{n},$$

$\mathrm{S}(n)$ désigne la somme des diviseurs du nombre n.

Solution. On a

$$\begin{aligned} s &= \mathrm{l}.(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots, \\ &= \mathrm{l}.(1-x) + \mathrm{l}.(1-x^2) + \mathrm{l}.(1-x^3) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\mathrm{l}.(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{l}.(1-x^2) = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{l}.(1-x^3) = -\left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{l}.(1-x^n) = -\left(x^n + \frac{x^{2n}}{2} + \frac{x^{3n}}{3} + \ldots\right).$$

Substituant, nous aurons

$$s = -\left\{\begin{array}{l} (x + x^2 + x^3 + \ldots) + \frac{1}{2}(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \\ + \frac{1}{3}(x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) + \ldots \\ + \frac{1}{n}(x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots) + \ldots \end{array}\right\},$$

ou bien, en représentant la première parenthèse par P_1, la deuxième par P_2, la troisième par P_3, ..., et la $n^{ième}$ par P_n,

$$s = -\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots + \frac{1}{n}P_n + \ldots\right).$$

P_1 contient toutes les puissances de x, P_2 toutes celles de x^2, P_3 toutes celles de x^3, ..., P_n toutes celles de x^n.

De plus, P_1 est multiplié par $\frac{1}{1}$, P_2 par $\frac{1}{2}$, P_3 par $\frac{1}{3}$, ..., P_n par $\frac{1}{n}$.

Or considérons le premier terme de P_n; ce sera x^n, et ce terme ne se trouve plus dans le reste de P_n et dans les expressions suivantes P_{n+1}, P_{n+2}, ...

Soit n' un diviseur de n; la suite $P_{n'}$ précède la suite P_n, et contient nécessairement x^n : en effet, les termes de $P_{n'}$ se forment en multipliant l'exposant de $x^{n'}$ respectivement par 2, 3, 4, ...; par conséquent, on aura en exposants tous les multiples de n', et, par suite, n. Par conséquent, le terme x^n est produit autant de fois que n a de diviseurs; et comme x^n provenant de $P_{n'}$ est multiplié par $\frac{1}{n'}$, il s'ensuit que le coefficient de x^n est une somme de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs respectivement chacun des diviseurs de n, y compris l'unité. En multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres, on obtient au numérateur de la fraction résultante la somme de tous les diviseurs de n, et au dénominateur le produit de tous ces diviseurs, c'est-à-dire n; et comme il faut mettre le signe — devant tous les termes, on a bien, d'après la notation adoptée,

$$a_n = -\frac{S(n)}{n}.$$

C. Q. F. D.