NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. GRILLET

Méthode élémentaire pour résoudre quelques questions sur les maximums

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 70-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__70_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

METHODE ELEMENTAIRE POUR RESOUDRE QUELQUES QUESTIONS SUR LES MAXIMUMS

(voir t II p 417 et t III p 165)

PAR M. H. GRILLET,

Professeur de mathématiques supérieures au lycée de Brest.

Lorsque plusieurs facteurs variables ont une somme constante, et qu'ils ne sont d'ailleurs assujettis à remplir

*) Nous engageons le lecteur à chercher ces formules par une autre voie, et à comparer.

aucune autre condition, on démontre facilement que le produit de ces facteurs est maximum quand tous sont égaux.

En établissant de nouvelles relations entre ces facteurs, on ne saurait écarter les limites entre lesquelles peut varier leur produit; si donc ils peuvent encore devenir égaux, leur produit est alors un maximum.

Cette remarque va nous permettre de déterminer les maximums d'une expression de la forme

$$(1)\qquad (a+x)^m (b+x)^n \ldots (a'-x)^{m'} (b'-x)^{n'} \ldots ,$$

où a, b,..., a', b',..., désignent des quantités positives, m, n,..., m', n',..., des nombres entiers et positifs.

En effet, considérons l'expression

$$(2)\qquad \left(\frac{a+x}{A}\right)^m \left(\frac{b+x}{B}\right)^n \ldots \left(\frac{a'-x}{A'}\right)^{m'} \left(\frac{b'-x}{B'}\right)^{n'} \ldots,$$

dans laquelle A, B,..., A', B',..., représentent des constantes arbitraires.

Si nous pouvons trouver des valeurs de A, B,..., A', B',..., qui rendent constante et positive la somme des $(m+n+\ldots+m'+n'\ldots)$ facteurs du premier degré, dont l'expression (2) est le produit, et qui permettent d'égaler ces facteurs les uns aux autres, ces valeurs de A, B,..., A', B',..., donneront, pour l'expression (2), une fonction de x, qui atteindra son maximum lorsque ses $(m+n+\ldots+m'+n'\ldots)$ facteurs seront tous égaux.

Pour que la somme des facteurs de l'expression (2) soit constante, il faut évidemment que l'on ait

$$(3)\qquad \frac{m}{A}+\frac{n}{B}+\ldots=\frac{m'}{A'}+\frac{n'}{B'}+\ldots,$$

et, pour que ces facteurs soient égaux,

$$(4)\qquad \frac{a+x}{A}=\ldots=\frac{a'-x}{A'}=\frac{b'-x}{B'}=\ldots.$$

Il s'agit de trouver des valeurs de A, B,..., A′, B′,..., et de x propres à vérifier les équations (3) et (4).

On peut commencer par chercher x, et l'équation qui en donnera la valeur est facile à former; il suffit de remplacer, dans l'équation (3), les quantités A, B,..., A′, B′,..., par $(a+x)$, $(b+x)$,..., $(a'-x)$, $(b'-x)$,..., qui doivent leur être proportionnelles en vertu des équations (4). On trouve ainsi

$$(5)\qquad \frac{m}{a+x}+\frac{n}{b+x}+\ldots=\frac{m'}{a'-x}+\frac{n'}{b'-x}+\ldots.$$

Je dois prouver que toute valeur réelle de x, tirée de l'équation (5), peut donner pour l'expression (2) un maximum. En effet, portons cette valeur de x dans $(a+x)$, $(b+x)$,..., $(a'-x)$, $(b'-x)$,..., et donnons à A une valeur quelconque de même signe que $(a+x)$; les proportions (4) détermineront, pour B,..., A′, B′,..., des valeurs de mêmes signes que $(b+x)$, ..., $(a'-x)$, $(b'-x)$, ...

Nous aurons donc, dans l'expression (2), un produit de facteurs dont la somme est constante. Nous aurons aussi une valeur particulière de x qui rend tous ces facteurs égaux et positifs. Leur somme est donc positive, et, comme ils sont égaux, leur produit est maximum.

Les expressions (1) et (2) ne diffèrent que par un facteur constant. Si ce facteur est positif, elles atteindront ensemble leur maximum; s'il est négatif, la première sera minimum quand la seconde sera maximum. Or ce facteur constant est de même signe que l'expression (1) quand on y remplace x par la valeur particulière tirée de l'équation (5); donc toute valeur réelle de x tirée de l'équation (5) rendra l'expression (1) maximum ou minimum, suivant qu'elle la rendra positive ou négative.

Il est facile de voir que, si l'expression (1) renferme k

facteurs différents, l'équation (5) sera tout au plus du degré $(k - 1)$.

La méthode précédente peut donner la solution de plusieurs problèmes. Nous en citerons un seulement, la recherche du cône de surface totale maximum inscrit dans une sphère donnée.

Note. L'équation (5) est la dérivée égalée à zéro de la fonction (1).