

A. ESTIENNE

Solution de la question 212

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 62-64

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__62_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 212

(voir t. VIII, p. 393).

PAR M. ESTIENNE (A.),
Élève du lycée de Versailles.

THÉORÈME. Soit DEF un triangle équilatéral circonscrit au triangle donné ABC; A, B, C sont respectivement sur DF, DE, EF. Appelons φ et γ les angles CBE, BCA, on aura

$$DE = DF = EF = \frac{a \sin \varphi + b \sin \left(\frac{1}{3} \pi + \gamma - \varphi \right)}{\sin \frac{1}{3} \pi},$$

où

$$a = BC; \quad b = AD.$$

Si l'on élève en A, B, C des perpendiculaires aux côtés du premier triangle équilatéral, on formera un second triangle équilatéral; la somme des aires des deux triangles équilatéraux est

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \left(\frac{1}{3} \pi + \gamma \right)}{2 \sin \frac{1}{3} \pi}. \quad (\text{FASSBENDER.})$$

Démonstration. On a : 1°.

$$\begin{aligned} \text{BCE} &= \frac{2}{3}\pi - \varphi; & \text{BCF} &= \frac{1}{3}\pi + \varphi; & \text{ACF} &= \frac{1}{3}\pi + \varphi - \gamma; \\ \text{FAC} &= \frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi; & \text{CE} &= \frac{a \sin \varphi}{\sin \frac{1}{3}\pi}; & \text{CF} &= \frac{b \sin \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right)}{\sin \frac{1}{3}\pi} \end{aligned}$$

donc EF a la valeur donnée ci-dessus, et l'aire du triangle équilatéral est donc $\frac{1}{2 \sin \pi} \left[a \sin \varphi + b \sin \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right) \right]^2$.

2°. Supposons que la perpendiculaire élevée en C au côté EF soit rencontrée en M par la perpendiculaire élevée en B, et en N par la perpendiculaire élevée en A; de sorte que MN sera le côté du second triangle équilatéral. Les triangles CBM, CAN donnent

$$\text{CM} = \frac{a \cos \varphi}{\sin \frac{1}{3}\pi}; \quad \text{CN} = \frac{b \cos \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right)}{\sin \frac{1}{3}\pi};$$

donc

$$\text{MN} = \frac{a \cos \varphi - b \cos \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right)}{\sin \frac{1}{3}\pi};$$

l'aire du second triangle équilatéral est donc

$$\frac{1}{2 \sin \frac{1}{3}\pi} \left[a \cos \varphi - b \cos \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right) \right]^2.$$

Ajoutant les deux aires, on trouve l'expression consignée ci-dessus.

Lorsque les trois perpendiculaires se rencontrent, on a

$$a \cos \varphi = b \cos \left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi \right);$$

alors l'aire du second triangle équilatéral est nulle, et comme la somme des aires des deux triangles est indépendante de φ , il s'ensuit que, dans ce cas, l'aire du premier triangle est un maximum ; et comme les perpendiculaires font entre elles des angles de 120 degrés, la somme des distances du point de rencontre aux sommets du second triangle équilatéral est un minimum, d'après une proposition connue.