GUSTAVE MARQFOY

Solution de la question 135

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 51-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__51_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 135

(voir t. V, p. 67)

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève en mathématiques supérieures.

PROBLÈME. *Trouver la relation qui doit exister entre le côté et la base d'un triangle isocèle, pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle.* (VIÈTE.)

Solution. Soit ABC un triangle isocèle dans lequel AB, AC sont les côtés égaux, BK étant la bissectrice;

$$AB = a,$$
$$BC = b.$$

Pour obtenir cette relation, il faut, dans $BK : AB :: m : n$, exprimer BK en fonction de a et de b. Or

$$BK : BC :: \sin C : 3 \sin \frac{C}{2} - 4 \sin \frac{C}{2}.$$
$$:: 2 \cos \frac{C}{2} : 4 \cos^2 \frac{C}{2} - 1;$$

( ) On trouve des relations du genre de celles qui ont été indiquées par M. Lebesgue, dans un Mémoire de M. Catalan *sur la transformation des variables dans les intégrales multiples*, inséré parmi ceux de l'Académie de Bruxelles.

donc

$$\mathrm{BK} = \frac{2b \cdot \cos\frac{C}{2}}{4\cos^2\frac{C}{2} - 1},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+2a}{a}}\,;$$

donc

$$\mathrm{BK} = \frac{ab\sqrt{\frac{b+2a}{a}}}{b+a},$$

et la relation cherchée sera

$$nb\sqrt{\frac{b+2a}{a}} = m(b+a).$$

1°. Supposons $m = n$; alors $b\sqrt{\frac{b+2a}{a}} = b + a$, ou, en développant, $b^3 + ab^2 - 2a^2b - a^3 = 0$. Divisant par a^3, et observant que $\frac{b}{a} = 2\cos C$, les valeurs de $\cos C$ seront données par l'équation

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Or la figure indique que, pour $m = n$, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{BK} = a$, l'angle $C = \frac{2\pi}{7}$.

Voyons si le résultat fourni par la trigonométrie s'accorde avec le calcul précédent.

On a l'équation

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 = 0,$$

dans laquelle

$$x = \cos\frac{2\pi}{7} \quad (\textit{voir } \text{t. V, p. 350}).$$

et cette équation a pour racines les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{7},\quad \frac{4\pi}{7},\quad \frac{6\pi}{7},\quad \frac{8\pi}{7},\quad \frac{10\pi}{7},\quad \frac{12\pi}{7},\quad \frac{14\pi}{7}.$$

Or

$$\cos\frac{14\pi}{7} = 1;$$

donc elle admet la racine $+1$, et si nous divisons son premier membre par $x-1$, le quotient sera

$$(1)\qquad 64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1.$$

Ce quotient égalé à zéro admettra les six autres racines : mais

$$\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7},$$

$$\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{10\pi}{7},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\frac{12\pi}{7}:$$

donc le quotient (1) est un carré, et si nous extrayons sa racine, nous trouvons

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0,$$

qui est précisément l'équation fournie par le premier calcul. On voit donc, qu'à l'exception de la racine $+1$, ces deux équations admettent les mêmes racines.

2°. $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. La relation devient $a^2 - b^2 - ab = 0$; d'où l'on tire l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui doit donner les valeurs de $\cos C$. En la résolvant, on trouve

$$x' = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),\quad x'' = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}).$$

Or

$$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = \cos 72^{\circ}, \quad \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = \cos 2.72.$$

De ces deux valeurs, la première seule convient, puisque $2.72 > 90^{\circ}$.

Donc $C = 72^{\circ}$. On le vérifie immédiatement sur la figure.

Ce résultat s'accorde avec celui qui est fourni par la trigonométrie. En effet, l'équation qui donne $\cos\frac{2\pi}{7}$ est

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Ses racines sont les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{5}, \quad \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{6\pi}{5}, \quad \frac{8\pi}{5}, \quad \frac{10\pi}{5};$$

donc elle admet la racine $+1$.

Le quotient de son premier membre par $x-1$ est

$$(2) \qquad 16x^4 - 16x - 36x^2 - 36x + 1;$$

mais

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5}.$$

donc le quotient (2) est un carré, et si nous extrayons la racine, nous obtenons l'équation

$$4x + 2x - 1 = 0,$$

qui est celle qui a été fournie par le calcul précédent.

3°. Si $a = b$, $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{\circ}$

Note. Le même élève nous a adressé de très-bonnes solutions, parvenues trop tard, de la question élémentaire du grand concours, et de la question 214^{me}.