

TERQUEM

**Théorème de Mac-Laurin sur les
courbes algébriques planes ; et
conséquences géométriques du théorème
analytique de M. Jacobi**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 440-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_440_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE MAC-LAURIN

Sur les courbes algébriques planes; et conséquences géométriques du théorème analytique de M. Jacobi.

1. **THÉORÈME.** *Soit une courbe algébrique de degré n ; par un point P , pris dans le plan de la courbe, on mène une première sécante, coupant la courbe en n points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$; et, par le même point P , une seconde sécante, coupant la courbe en n points $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$; par les points A_1, A_2, \dots, A_n , menant des tangentes à la courbe, qui coupent la seconde sécante en n points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; le centre de moyenne harmonique de ces n points, par rapport à P , est le même que celui des n points a_1, a_2, \dots, a_n , par rapport au même point P .*

Démonstration. Prenons le point a_n pour origine, $a_n P$ pour axe des x , PA_n pour axe des y ; si l'on conçoit que ce dernier axe se meuve parallèlement à lui-même, le point P restant sur l'axe des x , le rapport multiple

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2 \cdot \dots \cdot PA_n}{Pa_1 \cdot Pa_2 \cdot \dots \cdot Pa_n}$$

reste constant. (Théorème de Newton.)

Désignant ce rapport par K , on a

$$PA_1 \cdot PA_2 \cdot \dots \cdot PA_n = K (Pa_1 \cdot Pa_2 \cdot \dots \cdot Pa_n);$$

prenant les logarithmes et ensuite les différentielles, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \cdot PA_1}{PA_1} + \frac{d \cdot PA_2}{PA_2} + \dots + \frac{d \cdot PA_n}{PA_n} \\ = \frac{d Pa_1}{Pa_1} + \frac{d Pa_2}{Pa_2} + \dots + \frac{d Pa_n}{Pa_n} \end{array} \right.$$

la valeur connue de la sous-tangente donne

$$P\alpha_1 = \frac{PA_1 d.Pa_n}{d.PA_1}, \quad P\alpha_2 = \frac{PA_2 d.Pa_n}{d.PA_2}, \dots,$$

et de là

$$\frac{d.PA_1}{PA_1} = \frac{d.Pa_n}{P\alpha_1}, \quad \frac{d.PA_2}{PA_2} = \frac{d.Pa_n}{P\alpha_2}, \dots$$

Substituant dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} & d.Pa_n \left(\frac{1}{P\alpha_1} + \frac{1}{P\alpha_2} + \dots + \frac{1}{P\alpha_n} \right) \\ &= d.Pa_1 \left(\frac{1}{Pa_1} + \frac{1}{Pa_2} + \dots + \frac{1}{Pa_n} \right), \end{aligned}$$

car on a évidemment

$$d.Pa_1 = d.Pa_2 = d.Pa_3, \dots$$

Faisant tourner la première sécante autour du point P, le second membre ne change pas; donc le premier reste constant; et, lorsque la première sécante se confond avec la seconde, on a

$$\frac{1}{P\alpha_1} + \frac{1}{P\alpha_2} + \dots + \frac{1}{P\alpha_n} = \frac{1}{Pa_1} + \frac{1}{Pa_2} + \dots + \frac{1}{Pa_n}.$$

C. Q. F. D.

Observation. Telle est la démonstration *directe* de Mac-Laurin, fondée sur la géométrie différentielle. La méthode *projective* fournit une démonstration immédiate. Si l'on projette à l'infini la droite $PA_1 A_2 \dots A_n$, les tangentes menées par les points A_1, A_2, \dots, A_n , deviennent des asymptotes, et l'on retombe sur le théorème de Newton (tome VII, pages 385 et 422).

2. Considérations analytiques.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

l'une de degré m et l'autre de degré n , étant les équations

tions de deux courbes algébriques planes, on a

$$\sum \frac{F}{\varphi' x f' y - \varphi'(y) f' x} = 0.$$

Les équations ont mn solutions communes, coordonnées des mn points d'intersection; les indices désignent des dérivées partielles, prises par rapport à la variable jointe à l'indice; le signe sommatoire s'étend aux mn solutions communes; et F est une fonction quelconque en x, y d'un degré égal ou inférieur à $m + n - 3$ (voir tome VII, page 124).

Soient les équations de deux droites

$$(2) \quad \begin{cases} t f' y + u f' x = p, \\ t \varphi' y + u \varphi' x = q, \end{cases}$$

t et u sont des coordonnées courantes; $f'(y), f'x, \varphi'y, \varphi'x$ ont des valeurs déterminées par les solutions communes aux deux équations; p et q sont des fonctions entières rationnelles en x et y dont le degré ne doit pas dépasser le plus grand des deux nombres $m - 2, n - 2$; les valeurs de ces fonctions sont déterminées par les mêmes solutions simultanées; en sorte qu'on a ainsi mn couples de droites. Il est d'ailleurs évident que chaque couple de droites est parallèle au couple de tangentes menées par un point d'intersection aux deux courbes. U et T étant les coordonnées du point d'intersection d'un système de ces droites, on a

$$U = \frac{q f' y - p \varphi' y}{f' y \varphi' x - f' x \varphi' y}, \quad T = \frac{p \varphi' x - q f' x}{f' y \varphi' x - f' x \varphi' y};$$

on a ainsi mn points d'intersection, et, d'après le théorème cité,

$$\sum U = 0, \quad \sum T = 0.$$

Donc l'origine des coordonnées est le point de moyenne distance des mn points d'intersection du système de droites.

Telle est l'interprétation géométrique du théorème de M. Jacobi.

3. Faisons

$$\varphi(x, y) = y - ax, \quad \varphi'x = -a, \quad \varphi'y = 1;$$

on obtient

$$U = \frac{p - qf'y}{af'y + f'x}, \quad T = \frac{ap + qf'x}{af'y + f'x},$$

d'où

$$\sum \frac{p}{af'y + f'x} = 0, \quad \text{en faisant } q = 0$$

Si, dans l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

on remplace y par ax , on a une équation de degré m en x ; désignons-la par V ; et, en remplaçant y par ax dans $f'y$, l'expression $af'y + f'x$ est $\frac{dV}{dx}$; donc

$$\sum \frac{p}{af'y + f'x} = \sum \frac{p}{\frac{dV}{dx}} = 0,$$

ce qui ramène au théorème d'Euler (t. VII, p. 118).

4. *Application géométrique.* La distance inverse du pied de la tangente à l'origine est exprimée par

$$\frac{f'(x)}{xf'x + yf'y};$$

x et y sont les coordonnées du point de contact. Soient $Lx + M$ les deux derniers termes de l'équation $f = 0$; en mettant dans $f'x$, pour y sa valeur ax , cette fonction de degré $m - 1$ a la forme

$$L + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_{m-1}x^{m-1}.$$

Le dénominateur $xf'x + yf'y$, par le théorème sur les *homogènes*, se réduit à une fonction en x et γ de de-

gré $m - 1$; et, y étant remplacé par ax dans le dénominateur, celui-ci prend la forme

$$-mM + M_1x + M_2x^2 + \dots + M_{m-1}x^{m-1};$$

opérant la division, et s'arrêtant au premier terme du quotient, on obtient

$$\frac{f'(x)}{xf'x + yf'y} = \frac{-L}{mM} + \frac{x\psi(x)}{xf'x + yf'y},$$

et ψx est une fonction entière de degré $m - 2$; remplaçant y par ax , on a

$$\sum \frac{f'x}{xf'x + yf'y} = \frac{-L}{M} + \sum \frac{\psi(x)}{f'x + af'y} = \frac{-L}{M};$$

car ψx est d'un degré inférieur au degré du dénominateur, et le signe sommatoire s'étend à tous les points d'intersection de la sécante $y - ax = 0$ avec la courbe $f(x, y) = 0$; la somme des distances *inverses* des pieds des tangentes à l'origine est donc une quantité constante ; c'est le théorème de Mac-Laurin, rapporté ci-dessus, car

$$\frac{-L}{M} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pa_1} + \dots \quad (\text{voir } \S 1).$$

Observation. Si l'on avait écrit *analytiquement* le théorème géométrique de Mac-Laurin, on aurait obtenu tout de suite le théorème analytique d'Euler. Nouvel exemple de l'utilité de chercher dans la géométrie les indications de l'algèbre, dans celle-ci les indications de la géométrie.

5. Soient

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

les équations algébriques de trois surfaces de degré m , n , p ; ces surfaces ont mnp points en commun. Par chacun de ces points, menant un plan tangent à chacune des trois surfaces qui s'y rencontrent, on a mnp systèmes

de *trois plans*. Leurs directions sont déterminées par les dérivées $f'(x), f'(y), f'(z), \varphi'(x), \dots, \psi'(z)$, en prenant pour x, y, z les valeurs qu'elles ont aux points d'intersection.

Soient maintenant les équations des trois plans

$$uf'(x) + tf'(y) + vf'(z) = p_1,$$

$$u\varphi'(x) + t\varphi'(y) + v\varphi'(z) = p_2,$$

$$u\psi'(x) + t\psi'(y) + v\psi'(z) = p_3,$$

et l'on a mnp systèmes de trois semblables équations.

U, T, V étant les coordonnées du point d'intersection des trois plans, on a

$$[f'x\varphi'y\psi'z] = \frac{[p_1\varphi'y\psi'z]}{U} = \frac{[f'xp_2\psi'z]}{T} = \frac{[f'x\varphi'yp_3]}{V},$$

Les crochets indiquent des *déterminants*.

Chaque coordonnée est égale à une fraction dont le dénominateur commun est de degré $m + n + p - 3$; si donc le numérateur est d'un degré égal ou inférieur à $m + n + p - 4$, on aura

$$\sum U = \sum T = \sum V = 0;$$

car le théorème de M. Jacobi subsiste pour un nombre quelconque d'équations (*). L'interprétation géométrique est celle-ci : Chacun de ces mnp systèmes ternaires donne un point d'intersection; le centre de moyenne distance des mnp points est à l'origine des coordonnées.

6. Faisons

$$\varphi(x, y, z) = z - ax - by, \quad \psi(x, y, z) = z - a_1x - b_1y;$$

raisonnant comme ci-dessus, on trouve

$$\sum \frac{P}{Af'x + Bf'y + Cf'z} = 0;$$

(*) La géométrie est renfermée dans trois dimensions. L'analyse crée un monde à mille dimensions. Il existe peut-être des esprits auxquels le monde apparaît sous plus de trois dimensions.

p étant une fonction de degré $m - 1$ ou moindre, A, B, C des constantes, fonctions de a, b, a_1, b_1 , et le terme sommatoire s'étend aux m points communs aux deux plans et à la surface $f = 0$; de là, en opérant comme ci-dessus, on obtient ce théorème.

THÉORÈME. *Par un point fixe menant deux sécantes quelconques, rencontrant chacune en m points une surface de degré m ; menant un plan tangent par chacun des m points d'intersection de la première sécante, ils coupent la seconde sécante en mn points dont le centre harmonique, pris par rapport au point fixe, est constant pour toutes les sécantes passant par l'origine, et, par conséquent, le même que le centre harmonique des m points d'intersection de la seconde sécante, pris par rapport au point fixe.*

C'est le théorème de Mac-Laurin, étendu aux surfaces, qui est d'ailleurs évident, en faisant passer un plan par les deux sécantes.

Observation. Lorsque le point fixe s'éloigne à l'infini, le centre harmonique devient le centre de moyenne distance, et le théorème prend un énoncé conforme à ce changement de nom.

NOTE HISTORIQUE SUR MAC-LAURIN.

Mac-Laurin (Colin) est né à Kilmoddan (Écosse) en 1698 (*). A l'âge de 19 ans, il fut nommé professeur à Aberdeen, et à 21 ans il publia, sur la description *organique* des courbes, un ouvrage qui étonna Newton. Dès lors, on voulait le nommer professeur à l'Université d'Édimbourg; mais Grégory (Jacques) s'y opposa, parce que

(*) *Mac* veut dire fils. Cette épithète entre dans la composition des noms propres chez les peuples semitiques (*ben*); celtiques (*her, mac*), au commencement du nom; et chez les peuples germaniques à la fin (*sohn*).

cette nomination diminuait son traitement. Pour lever cette difficulté, Newton se chargea de payer les honoraires du jeune professeur, et Mac-Laurin fut nommé. Il a composé des ouvrages qui ont immortalisé son nom, mais dont plusieurs ne purent être publiés qu'après sa mort. Lors de l'invasion du *prétendant* en Écosse, il fut chargé, en 1745, de fortifier la ville d'Édimbourg, et les partisans d'Edouard s'étant emparés de la ville, Mac-Laurin fut obligé de se sauver. Les fatigues et les tribulations altérèrent sa santé, et il mourut le 14 juin 1746, âgé de 48 ans.

LISTE DE SES OUVRAGES.

1. *Geometrica organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis; auctore Colino Mac-Laurin, matheos in collegio novo Abredonensi professore, et reg. Soc. soc.* Londini, MDCCXX, de 140 pages in-4°.

L'ouvrage est dédié à Newton, qui a accordé la permission d'imprimer le 12 novembre 1719; nous donnerons une analyse de cet ouvrage remarquable où nos géomètres ont largement puisé.

2. *Traité des fluxions.* Édimbourg, 1748; in-4°. On y trouve la série qui porte son nom, et des applications de mécanique rationnelle d'une grande fécondité. Il me semble que c'est là qu'on fait usage, pour la première fois, de la décomposition des forces accélératrices suivant trois axes rectangulaires, dont l'usage est devenu si universel. On y trouve aussi le célèbre théorème sur l'attraction d'un ellipsoïde sur un point placé à l'extrémité d'un axe principal, et toujours par la *géométrie différentielle*, à l'instar de Newton.

Cet ouvrage a été traduit en français.

3. *Exposition des découvertes philosophiques de Newton;* Lond., 1748; in-8°, et traduit en français par

Lavirotte; Paris, 1749, in-4°, et en latin par le père Falk, jésuite; Vienne, 1761, in-4°.

4. *A Treatise of Algebra in three parts, containing :*
 1°. *The fundamental rules and operations ;*
 2°. *The composition and resolution of equations of all degrees ; and the different affections of their roots ;*
 3°. *The application of algebra and geometry to each other to which is added an Appendix concerning the general properties of geometrical lines.* In-8° de 502 pages.

Ce volume d'œuvres posthumes a eu plusieurs éditions; la quatrième est de 1779. Les deux premières parties ont été composées pour servir de commentaire à l'Arithmétique universelle de Newton. La première partie contient des idées extrêmement claires sur les *quantités négatives*. On y lit que *l'égalité* algébrique ne consiste pas seulement dans la *quantité*, mais aussi dans la *qualité* indiquée par les signes. Cela revient à dire que les signes sont des *adjectifs*.

La troisième partie renferme la construction des courbes en général, puis celle des coniques, leurs principales propriétés et leurs usages pour la construction des équations quadratiques et bi-quadratiques. Hormis les propriétés focales qui sont omises, on a ici, en 68 pages, ce qui est délayé ailleurs en 500 pages. Cette troisième partie, écrite en anglais ainsi que les deux premières parties, sert de préparation à l'Appendice qui est en latin, sous ce titre :

5. *Appendix de linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus*, en 63 pages. Analysant cet opuscule, un géomètre d'une compétence incontestable dit que cet ouvrage est *d'une élégance et d'une précision admirables* (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes*, page 146). Mac-Laurin a été en-

gagé à se livrer à des méditations sur les propriétés des cercles en général par la dissertation de Newton sur les courbes du troisième ordre, premier pas dans ce genre de recherches, et par un théorème général sur ces mêmes courbes, trouvé par Cotes et communiqué par Robert Smith. L'opuscule est divisé en trois sections.

La première section contient quatre théorèmes. Le premier théorème est celui qui est énoncé ci-dessus. Les deux autres théorèmes concernent les cercles et les rayons de courbure; nous y reviendrons. Le quatrième théorème est la collinéation ou situation en ligne droite *des centres des moyennes harmoniques*. C'est une généralisation d'un théorème de Cotes sur les lignes du troisième ordre. L'expression *moyenne harmonique* est de Mac-Laurin. L'appellation de centre de moyenne harmonique a été introduite par M. Poncelet (*).

La deuxième section est consacrée à des propriétés segmentaires dans les sections coniques, et la troisième contient vingt-quatre propositions sur les lignes du troisième ordre. La principale est celle-ci : *Lorsqu'un quadrilatère est inscrit dans une courbe du troisième ordre et que l'intersection des côtés opposés est aussi sur cette courbe, alors les tangentes menées par deux sommets opposés se coupent sur la courbe*. C'est la huitième proposition.

6. Fragment d'un Mémoire servant de supplément à la *Géométrie organique*. Écrit en France en 1721, adressé à la Société royale en 1732, est inséré dans les Transactions philosophiques de 1735. On y trouve le théorème général suivant.

THÉORÈME. *Si un polygone de forme variable se meut*

(*) Journal de M. Crelle, tome III, pages 213-272, 1828; en français. Ce Mémoire, qui n'a paru qu'à l'étranger, est presque inconnu en France. Nous le reproduisons dans ce Recueil, si l'illustre géomètre nous en donne l'autorisation.

de manière que tous ses côtés passent respectivement par autant de points fixes donnés, et que tous ses sommets, moins un, parcourent des courbes géométriques des degrés m, n, p, q, \dots , le sommet libre engendrera une courbe de degré $2mnpq \dots$, qui se réduit au degré sous-double $mnpq \dots$, quand tous les points fixes sont en ligne droite.

On lit dans l'*Aperçu historique* (page 150) : « Si toutes » les lignes directrices sont droites, le sommet libre du » polygone engendré est une conique ; et si le polygone est » un triangle, le théorème n'est autre que l'hexagramme » de Pascal. Ce théorème avait déjà été donné par Newton, » pour le cas où l'un des trois points par où doivent pas- » ser les trois côtés du triangle mobile était situé à l'in- » fini (lemme 20, 1^{er} liv. ; Principes). Mais c'est à Mac- » Laurin qu'on doit son énoncé général, et d'avoir aperçu » dans ce mode de description des coniques, le beau théo- » rème qui était alors ignoré ; l'*Essai sur les coniques*, » qui en contient l'énoncé, n'ayant été retrouvé qu'en » 1779, par les soins de M. l'abbé Bossut. »

M. Poncelet a donné cette belle et simple démonstration du théorème de Mac-Laurin :

Soient $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ les directrices données, de degrés m_1, m_2, \dots, m_n ; $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n+1}$ désignant les pôles, points fixes. La droite qui passe par p_1 rencontre la directrice m_1 en m_1 points ; ainsi un faisceau de m_1 droites passe par le pôle m_2 ; ce faisceau coupe la directrice m_2 en $m_1 m_2$ points ; un faisceau de $m_1 m_2$ droites passe donc par le pôle m_3 , et ainsi de suite : de sorte que, par le dernier pôle p_{n+1} , passe un faisceau de $m_1 m_2 \dots m_n$ droites qui coupent la droite qu'on a menée primitivement par p_1 en autant de points qui appartiennent à la courbe décrite par le sommet libre. Mais en menant la droite $p_1 p_{n+1}$ et faisant les constructions à rebours, on obtient $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$

droites qui rencontrent la première droite au même point p_1 ; donc ce point est un point multiple de l'ordre $m_1 m_2 \dots m_n$: par conséquent, toutes les transversales passant par p_1 coupent la courbe décrite par le point libre en $2 m_1 m_2 \dots m_n$ points; donc cette courbe est du degré marqué par ce produit. Mais si tous les pôles sont sur une même droite, le faisceau donné par la dernière construction se réduit à cette droite; les pôles p_1 et p_{n+1} deviennent des points conjugués, et le degré de la courbe se réduit à moitié. (*Traité des propriétés projectives*, § 539, page 332; 1822) (*).