NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUSTAVE MARQFOY

Solution de la question 45

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 432-433

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__432_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 45

(voir t. I, p. 519) :

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Institution Sainte-Barbe.

Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué donné de grandeur seulement.

Je prends l'une des ellipses correspondante à une position des deux diamètres donnés. Son équation est

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2.$$

Si l'on prend pour nouveaux axes le même axe des x et une perpendiculaire menée par l'origine pour axe des y, l'équation de l'ellipse deviendra, à l'aide des formules de transformation

$$y = \frac{y'}{\sin\theta}, \quad x = x' - y'\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$a'^2y^2 + b'^2(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = a'^2b'^2\sin^2\theta,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} &a'^2y^2 + b'^2\sin^2\theta . x^2 + b'^2\cos^2\theta . y^2 \\ &- 2b'^2xy . \sin\theta\cos\theta = a'^2b'^2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Cette équation devient, en remplaçant $\sin^2\theta$ par $\frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta$ par $\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, et en ordonnant,

$$\begin{aligned} &b'^2(x^2+y^2-a'^2) + 2a'^2y^2 \\ &= b'^2(x^2-y^2-a'^2)\cos 2\theta + 2b'^2xy . \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Pour trouver le lieu des intersections successives des ellipses représentées par cette équation lorsque l'angle 2θ varie, il faut, d'après la règle ordinaire, prendre la dérivée par rapport à 2θ et éliminer cet angle entre l'équation ainsi obtenue et la première.

La dérivée est

$$b'^2(x^2-y^2-a'^2) . \sin 2\theta - 2b'^2 . xy\cos 2\theta = 0,$$

et l'angle θ s'élimine en élevant les deux équations au carré, et en ajoutant; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} &[b'^2(x^2+y^2-a'^2) + 2a'^2y^2]^2 \\ &= b'^4(x^2-y^2-a'^2)^2 + 4b'^4x^2y^2, \end{aligned}$$

ou, toutes réductions faites, et en posant, pour abréger,

$$A^2 = \frac{b'^2+2a'^2}{2}, \quad B^2 = \frac{b'^2(b'^2+2a'^2)}{2(a'^2+b'^2)},$$

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.