NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS THOMAS

Note sur le changement de la variable indépendante

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 365-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__365_0>

NOTE SUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE;

PAR M. LOUIS THOMAS.

Supposons que l'on ait une équation différentielle entre la variable indépendante x, sa fonction y et les dérivées successives de cette fonction

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dy^m}\right) = 0,$$

et que l'on veuille, au moyen de la relation

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dy^n}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^pz}{dx^p}\right) = 0,$$

transformer la première équation en une autre qui ne contienne que x, z et les dérivées de x par rapport à z, considérée comme nouvelle variable indépendante. Pour y parvenir, on différentiera n fois $\mathrm{F} = 0$ et m fois $\varphi = 0$ par rapport à x. On aura ainsi $m + n + 2$ équations contenant y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}$ que l'on pourra éliminer, et il restera une équation contenant x, z, $\frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{p+m}z}{dx^{p+m}}$ que l'on pourra transformer en une autre contenant x, z, $\frac{dx}{dz}; \ldots, \frac{d^{m+p}z}{dx^{m+p}}$ au moyen des relations

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \ldots,$$

ce qu'il fallait obtenir.

Si l'on avait voulu une équation finale contenant y, z, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ..., on aurait préparé les équations

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

de manière qu'elles continssent, au lieu des dérivées de y et de z par rapport à x, les dérivées de x et de y par rapport à z prise pour variable indépendante au moyen des relations

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots,$$

et l'on différentierait la première équation résultante n fois et la seconde m fois pour éliminer x et toutes les dérivées par rapport à z.

En général, soient $k - 1$ équations différentielles

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_{k-1} = 0,$$

entre k fonctions y, z, ..., v, u, t de la variable indépendante x et cette valeur elle-même, outre l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,\right) = 0,$$

qui donne y en fonction de x. Si l'on veut obtenir une équation ne contenant que x, t et les dérivées de x par rapport à t prise pour nouvelle variable indépendante, on différentiera α fois chacune des k équations

$$F = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots, \quad \varphi_{k-1} = 0$$

par rapport à x, et l'on déterminera α de manière que le nombre total des équations $k\alpha + k$ soit supérieur d'une unité au nombre des quantités à éliminer, lesquelles sont y, x, ..., v, u et leurs dérivées par rapport à x. Soient donc m, n,..., p, q les ordres des dérivées les plus élevées de y, z,..., v, u qui entrent dans les k équations données ; après les avoir différentiées α fois, on aura les dérivées de y jusqu'à l'ordre $m+\alpha$, celles de z jusqu'à l'ordre $n+\alpha$, celles de v jusqu'à l'ordre $p+\alpha$, et celles de u jusqu'à l'ordre $q+\alpha$. On aura donc à éliminer

$m+\alpha+1+n+\alpha+1+\ldots+p+\alpha+1+q+\alpha+1$ quantités

ou

$$m+n+\ldots+p+q+(k-1)\alpha+k-1,$$

ou

$$m+n+\ldots+p+q-\alpha+k\alpha+k-1 \text{ quantités.}$$

Pour que ce nombre soit inférieur d'une unité à $k\alpha+k$, nombre des équations, il faut et il suffit qu'on ait

$$m+n+\ldots+p+q=\alpha.$$

Si r est l'ordre de la dérivée la plus élevée de t, entrant dans les équations primitives

$$\text{F}=0, \quad \varphi_1=0, \ldots, \quad \varphi_{k-1}=0,$$

on aura une équation finale contenant x, t et les dérivées de t par rapport à x jusqu'à l'ordre $r+\alpha$, qu'on transformera aisément en une équation contenant α, t et les dérivées de x par rapport à t aussi jusqu'à l'ordre $r+\alpha$. C'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Si l'on avait demandé une équation finale contenant u, t et les dérivées de u par rapport à t, on aurait préparé les équations de manière qu'elles continssent les mêmes variables et les dérivées de toutes excepté t par rapport à t prise pour nouvelle variable indépendante, et l'on aurait ensuite opéré comme on vient de le dire.