

E. CATALAN

**Sur le problème de la sphère tangente
à quatre plans donnés**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 352-361

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_352_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE PROBLÈME DE LA SPHÈRE TANGENTE A QUATRE
PLANS DONNÉS;**

PAR E. CATALAN.

(Extrait de la Geometrie descriptive de Lafremoire, 2^e edition; 1849.)

1. Si l'on suppose que les quatre plans qui composent les faces d'un tétraèdre soient indéfiniment prolongés, on pourra se proposer de chercher toutes les sphères qui touchent à la fois ces quatre plans.

Afin de déterminer, en premier lieu, quel peut être le nombre de ces sphères, observons que le plan de la base ABC du tétraèdre, prolongé indéfiniment, forme, avec les trois autres faces, six angles dièdres dont trois sont *intérieurs*, et dont les trois autres sont *extérieurs*.

Pour qu'un point soit également distant des quatre faces du tétraèdre, il faut qu'il soit situé sur trois des plans bissecteurs de ces six angles dièdres. Si donc P, Q, R sont les plans bissecteurs des angles *intérieurs*, et que P', Q', R' soient les plans bissecteurs des angles *extérieurs*, il y aura autant de sphères satisfaisant à la question, qu'il y aura de points déterminés par les combinaisons suivantes des plans bissecteurs :

| | | | |
|----------|-----------|------------|-------------|
| P, Q, R, | P, Q, R', | P, Q', R', | P', Q', R'. |
| | Q, R, P', | Q, R', P', | |
| | R, P, Q', | R, P', Q'. | |

Le nombre de ces points, et par conséquent le nombre des sphères cherchées, est au plus égal à *huit*.

2. La sphère déterminée par les plans P, Q, R, c'est-à-dire la sphère *inscrite* au tétraèdre, existe toujours.

Il en est de même pour les *quatre* sphères déterminées par les plans

| |
|-------------|
| P, Q, R', |
| Q, R, P', |
| R, P, Q', |
| P', Q', R', |

que l'on appelle *sphères ex-inscrites*, et qui sont telles, que chacune d'elles touche une des faces du tétraèdre et les prolongements des trois autres faces.

Considérons, par exemple, les trois plans bissecteurs P', Q', R'. Il est évident que chacun de ces plans fait,

avec le *prolongement* de la face ABC , un *angle dièdre aigu*; conséquemment, ces trois plans ne peuvent se couper deux à deux suivant des droites parallèles, de manière à former les faces d'un prisme triangulaire; donc *ils se coupent en un seul point, centre de la sphère ex-inscrite suivant la face ABC* . La même démonstration s'appliquerait aux sphères ex-inscrites suivant les trois autres faces, et il est facile de reconnaître que leurs centres seraient donnés par les combinaisons

P, Q, R' ,

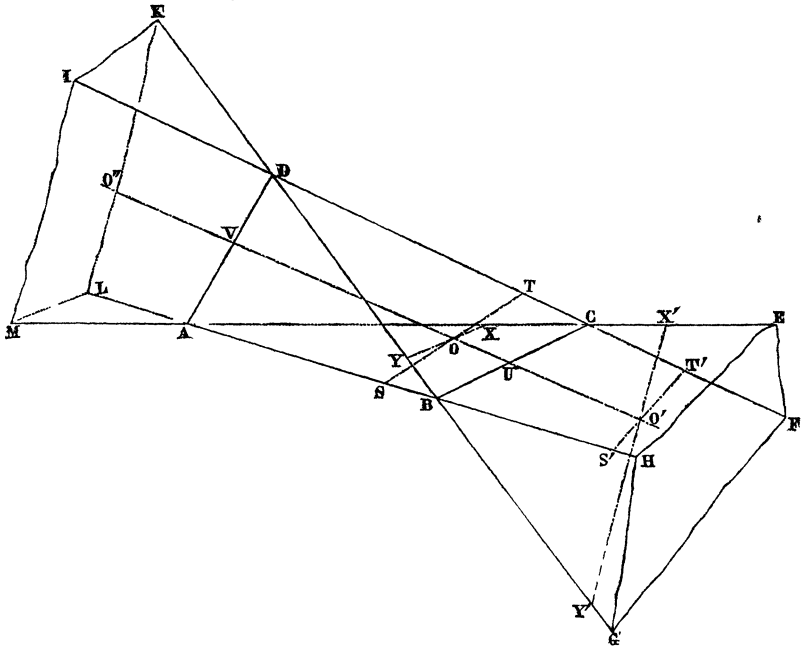
Q, R, P' ,

R, P, Q' ,

des six plans bissecteurs.

3. Considérons maintenant le tétraèdre $ABCD$ (*fig. 1*), et supposons que l'on prolonge ses différentes faces ainsi que l'indique la figure; il est clair que l'on obtiendra deux espaces indéfinis $BCEFGH$, $ADIKLM$, terminés chacun par quatre plans, et s'appuyant sur les deux arêtes opposées BC , AD . Ces espaces, dont la forme est assez bien indiquée par celle d'un *comble à quatre pentes*, ont été désignés sous le nom d'*angles prismatiques* et de *bi-angles*. On comprend que, dans certains cas, une sphère puisse être inscrite dans un angle prismatique. Il semblerait, d'après cette considération, que le nombre des sphères inscrites dans les *six* angles prismatiques obtenus en considérant ces trois couples d'arêtes opposées, puisse s'élever à six; mais il est aisé de démontrer que si l'on peut inscrire une sphère dans l'angle prismatique $BCEFGH$, on n'en pourra pas inscrire dans l'angle prismatique opposé, et réciproquement.

Fig 1.



En effet, quelle que soit la position de la sphère cherchée, son centre doit se trouver sur les plans bissecteurs des angles dièdres *intérieurs* dont les arêtes sont AD et BC. Le premier plan bissecteur rencontre l'arête BC en un point U *situé entre* B et C. De même, le second plan bissecteur rencontre AD en un point V, *situé entre* A et D. Le centre cherché doit donc se trouver sur la droite UV, *intersection des deux plans bissecteurs*. Ce centre doit aussi se trouver sur le plan R', bissecteur de l'angle dièdre *extérieur* ayant pour arête AB; d'ailleurs une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point; donc, etc.

On peut observer encore que le plan R' est extérieur au tétraèdre, dans lequel est située la droite UV; donc

le centre de la sphère dont il s'agit sera *sur le prolongement* de UV , soit en O' , dans l'angle prismatique $BCEFGH$, soit en O'' , dans l'angle prismatique $ADIKLM$.

S'il arrive que le plan R' soit parallèle à la droite UV , alors le centre de la sphère est transporté à l'infini, ou plutôt cette sphère n'existe pas.

Au lieu de déterminer le centre O' ou le centre O'' par l'intersection du plan P passant suivant BC , du plan R' passant suivant AB et du plan bissecteur ADU , il est clair qu'on pourrait l'obtenir au moyen de la combinaison des plans P , R' et Q' , en supposant que Q' soit le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur dont l'arête est AC . Nous retombons ainsi sur la combinaison P , R' , Q' , indiquée plus haut.

Nous voyons donc que les sphères déterminées par les combinaisons

$$\begin{aligned} &P, R', Q', \\ &Q, P', R', \\ &R, Q', P', \end{aligned}$$

peuvent, en tout ou en partie, ne pas exister, c'est-à-dire que le nombre des solutions du problème peut être réduit à *cinq*. Mais peut-il s'élever à *huit*, à *sept* ou même à *six*? C'est ce qu'il convient d'examiner. Il faut bien remarquer en effet que, dans les développements qui précèdent, rien ne prouve qu'en général la droite UV rencontrera le plan R' , ou, ce qui est la même chose, que les plans P , R' , Q' se couperont en un point unique.

4. Afin d'éclaircir cette partie de la question, nous commencerons par démontrer la proposition suivante.

THÉORÈME I. *Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.*

Considérons, par exemple, le plan AUD , qui divise

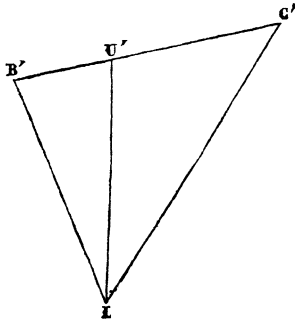
en deux parties égales l'angle dièdre intérieur dont l'arête est AD. Il s'agit de démontrer que

$$\frac{BU}{CU} = \frac{C}{B},$$

en représentant l'aire d'une face par la lettre qui indique le sommet opposé à cette face.

Projetons la figure sur un plan quelconque, perpendiculaire à AD. Cette droite aura pour projection un point I (*fig. 2*); et les plans ABD, AUD, ACD, étant perpendiculaires au plan de projection, auront pour traces des droites IB', IU', IC' telles, que IU' sera la bissectrice de l'angle formé par IB' et IC'. Enfin la droite BUC se projettera suivant une droite B'U'C'.

Fig. 2.



Cela posé, le théorème de géométrie plane donne

$$\frac{B'U'}{C'U'} = \frac{B'I}{C'I}.$$

Mais il est clair que B'U', C'U' sont des droites proportionnelles à BU, CU, et que B'I, C'I sont égales, respectivement, aux perpendiculaires abaissées des points B, C sur la base AD des triangles ABD, ACD. La proportion précédente revient donc à celle qu'il s'agissait de démontrer.

5. Supposons qu'après avoir mené la droite UV, déterminée par les proportions

$$\frac{BU}{CU} = \frac{C}{B}, \quad \frac{AV}{DV} = \frac{D}{A}.$$

on mène, semblablement, la droite ST, qui rencontre les arêtes opposées AB, CD, de manière que

$$\frac{AS}{BS} = \frac{B}{A}, \quad \frac{DT}{CT} = \frac{C}{D}.$$

D'après ce qui précède, *chacune de ces droites doit contenir le centre de la sphère inscrite au tétraèdre*; donc, puisque ce centre existe toujours, les deux droites se coupent. De là, ce théorème :

THÉORÈME II. *Les droites qui partagent les arêtes opposées d'un tétraèdre, chacune en deux segments additifs proportionnels aux faces adjacentes à ses deux extrémités, se coupent toutes les trois en un même point, centre de la sphère inscrite au tétraèdre.*

6. Du reste, on peut démontrer directement que les droites UV, ST se coupent, en observant que les proportions précédentes donnent

$$AV \cdot DT \cdot CU \cdot BS = AS \cdot BU \cdot BT \cdot DV.$$

7. Au lieu de partager les arêtes en segments additifs, supposons qu'on les partage en segments soustractifs, de manière à satisfaire aux proportions

$$\frac{AX'}{CX'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{DY'}{BY'} = \frac{B}{D}, \quad \frac{DT'}{CT'} = \frac{C}{D}, \quad \frac{AS'}{BS'} = \frac{B}{A}.$$

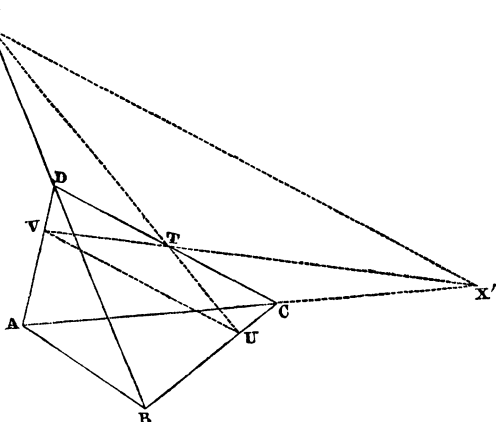
Comme ces proportions donnent

$$AS' \cdot BY' \cdot CX' \cdot DT' = AX' \cdot BS' \cdot CT' \cdot DY',$$

on conclut encore que les droites S'T', X'Y' sont dans un même plan. Donc, *en général*, elles se couperont en

un même point O' , situé aussi sur la droite VU . Ce point sera le centre de l'une des sphères inscrites dans les angles prismatiques.

Fig. 3.



8. Pour que cette sphère n'existe pas, il faut que les droites UV , $X'Y'$ (fig. 3), lesquelles sont *toujours dans un même plan*, soient parallèles entre elles. Cherchons dans quel cas aura lieu ce parallélisme.

Les proportions

$$\frac{AX'}{CX'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{CT}{DT} = \frac{D}{C}, \quad \frac{DV}{AV} = \frac{A}{D},$$

donnent

$$AX' \cdot CT \cdot DV = CX' \cdot DT \cdot AV;$$

donc les points X' , T , V sont en ligne droite, et AVX' est un triangle. A cause de la transversale DTC , nous aurons donc

$$AC \cdot TX' \cdot DV = AD \cdot VT \cdot CX'.$$

De même, UTY' est une droite; et le triangle BUY' , coupé par la transversale DTC , donne

$$BC \cdot UT \cdot DY' = BD \cdot TY' \cdot CU.$$

Maintenant, les deux droites VU , $X'Y'$ étant supposées parallèles, on a

$$\frac{VT}{UT} = \frac{TX'}{TY'}$$

Si l'on multiplie membre à membre les deux premières égalités, et qu'on ait égard à cette dernière, on obtient

$$AC \cdot BC \cdot DV \cdot DY' = AD \cdot BD \cdot CU \cdot CX',$$

ou

$$\frac{AC}{CX'} \cdot \frac{BC}{CU} = \frac{AD}{DV} \cdot \frac{BD}{DY'}$$

Mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{AC}{CX'} = \frac{C - A}{A}, \quad \frac{BC}{CU} = \frac{B + C}{B},$$

$$\frac{AD}{DV} = \frac{A + D}{A}, \quad \frac{BD}{DY'} = \frac{D - B}{B} :$$

donc

$$(C - A)(B + C) = (A + D)(D - B),$$

ou

$$\frac{C - A}{D - B} = \frac{A + D}{B + C} = \frac{C + D}{C + D}.$$

Cette proportion exige que $A + D = B + C$.

Ainsi, pour que la sphère O' disparaisse, *il faut et il suffit que la somme des aires des faces qui ont AD pour arête commune, soit équivalente à la somme des deux autres faces.*

9. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'on n'a pas, à la fois, $C = A$ et $D = B$. Si ces deux conditions étaient vérifiées, les points X' et Y' seraient transportés à l'infini, aussi bien que la sphère O' . En même temps, comme les sommes $A + B$ et $C + D$ seraient égales, la sphère inscrite dans l'un des angles prismatiques ayant pour arêtes AD ou CD , aurait un rayon

infini. C'est-à-dire que le nombre des sphères tangentes aux quatre plans serait réduit à six.

10. En résumé :

1°. *Quand la somme des aires de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux ;*

2°. *Si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux, il n'y a plus qu'une sphère de la troisième espèce ;*

3°. *Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, les sphères inscrites dans les angles prismatiques se transportent toutes les trois à l'infini.*

On vérifie ces conclusions en cherchant les relations qui existent entre les rayons des trois sphères, les aires des faces, et le volume V du tétraèdre ; ces relations sont

$$\pm V = \frac{1}{3} R_1 (A + B - C - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_2 (A + C - B - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_3 (A + D - B - C).$$

(Voir tome VI, page 253.)
