

JULLIEN

Solution de la question 63 et note sur les transversales sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 322-324

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_322_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 63

(voir t. II, p. 137).

ET NOTE SUR LES TRANSVERSALES SPHÉRIQUES

(voir t. VII, p. 282);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,

Professeur de mathématiques.

Deux triangles sphériques ABC, A'B'C', situés sur une même sphère, sont tels, que les arcs de grand cercle AA', BB', CC' concourent en un même point S; les intersections de AB avec A'B', de AC avec A'C', de BC avec B'C', sont sur un arc de grand cercle. (FINCK.)

Puisque la théorie des transversales rectilignes peut être transportée dans la géométrie sphérique, pourvu que l'on change les lignes droites en arcs de grands cercles, et que, dans les relations entre les segments, on substitue aux segments leurs sinus, on a, en considérant les triangles ABS, ACS, BCS et les transversales A'B', A'C', B'C', et les intersections D, E, F de AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C',

$$\begin{aligned} \sin AD \cdot \sin A'S \cdot \sin BB' &= \sin AA' \cdot \sin B'S \cdot \sin BD, \\ \sin CE \cdot \sin C'S \cdot \sin AA' &= \sin CC' \cdot \sin A'S \cdot \sin AE, \\ \sin BF \cdot \sin B'S \cdot \sin CC' &= \sin BB' \cdot \sin C'S \cdot \sin CF; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la multiplication,

$$\sin AD \cdot \sin CE \cdot \sin BF = \sin BD \cdot \sin AE \cdot \sin CF.$$

Les points D, E, F sont donc sur un même arc de grand cercle.

Ce théorème est connu dans la géométrie plane et rectiligne.

M. Brianchon (*Journal de l'École Polytechnique*, 13^e cahier, page 229) considère ce dernier théorème comme un cas particulier du théorème suivant :

Si l'on trace un triangle sur la surface extérieure d'une pyramide triangulaire, et qu'on mène les diagonales des trois quadrilatères formés sur les faces de la pyramide par ses arêtes, l'intersection de la base et le côté du triangle, le plan de la base, le plan du triangle et le plan conduit par les intersections des diagonales dans chaque quadrilatère, se coupent suivant une même ligne droite.

En effet, de cette proposition, il résulte que les intersections des côtés des triangles avec les côtés correspondants de la base sont, dans l'espace, sur une même ligne droite, et si l'une des arêtes de la pyramide se rapproche indéfiniment du plan des deux autres, ces trois intersections, qui seront à la limite celles des côtés analogues de deux triangles ayant leurs sommets sur trois droites concourantes, resteront en ligne droite.

Il sera peut-être utile aux élèves de montrer ici comment on établit la théorie des transversales sphériques.

THÉORÈME. Tout arc de grand cercle détermine, sur les trois côtés d'un triangle sphérique ou sur leurs prolongements, six segments tels, que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des sinus des trois autres.

Considérons le triangle ABC et un arc transversal coupant les côtés AB, AC, BC en F, E, D.

On a, dans les triangles AEF, CDF, BDF :

$$\sin AE : \sin AF :: \sin F : \sin E,$$

$$\sin CD : \sin CE :: \sin E : \sin D,$$

$$\sin BF : \sin BD :: \sin D : \sin F;$$

d'où l'on tire, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens et multipliant,

$$\sin AE . \sin CD . \sin BF = \sin AF . \sin CE . \sin BD.$$

Toute la théorie des transversales sphériques se déduit de ce théorème de la même manière que la théorie des transversales rectilignes se déduit du théorème analogue.
