

FINCK

## Note sur la toupie

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 9  
(1850), p. 310-316

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1850\\_1\\_9\\_\\_310\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__310_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## NOTE SUR LA TOUPIE;

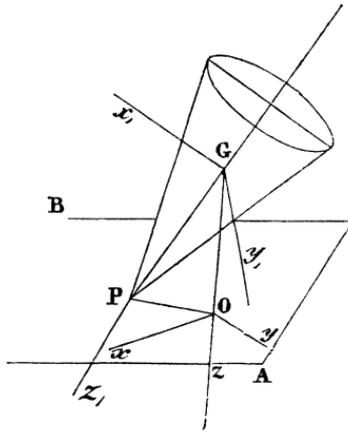
PAR M. FINCK,  
Professeur.

---

La toupie peut être regardée comme un cône droit homogène, pesant, appuyé par son sommet P (*fig. 1*) sur un plan horizontal. On place ce corps de façon que son axe PG fasse, avec la verticale, un angle  $\alpha$ , et on lui imprime une vitesse horizontale dont la direction ne passe pas par le centre de gravité G.

Fig. 1

\*



Ce point sera animé, parallèlement au plan fixe, d'un mouvement rectiligne uniforme; de plus, il aura un mouvement vertical, dans la détermination duquel on peut faire abstraction du mouvement horizontal: ce qui revient à considérer le mouvement initial comme dû à un couple.

Soit  $R$  la résistance du plan;  $Gz_1$  est un axe principal. Soient  $Gx_1$ ,  $Gy_1$  deux autres axes principaux.  $O$  étant la projection de  $G$  sur le plan fixe, on prendra pour axes fixes la verticale  $Oz$ , prolongement de  $GO$ , et les droites  $Ox$ ,  $Oy$  menées dans le plan  $AB$ . Si l'on pose  $PG = \beta$ , comme l'angle  $PGO = \alpha$ ,  $GO$  sera  $\beta \cos \alpha$ , que je nomme  $\gamma$ .

$A$ ,  $B$ ,  $C$  sont les trois moments d'inertie,  $C$  étant relatif à  $Gz_1$ , et, par suite,  $B = A$ .

La vitesse angulaire est  $\omega$ ;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  sont ses composantes par rapport à  $Gx_1$ ,  $Gy_1$ ,  $Gz_1$ . Comme les moments de  $R$  et du poids de la toupie par rapport à  $Gz_1$  sont nuls, l'équation du mouvement de rotation autour de  $Gz_1$  est

$$dr = 0, \quad \text{d'où} \quad r = n, \quad n \text{ étant une première constante.}$$

Soient  $M$  la masse de la toupie,  $gM$  son poids ( $g = 9^m, 80$ ); soient  $a, b, c$  les cosinus des angles que  $Oz$  fait avec les  $x_1, y_1, z_1$ ; la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à  $Oz$ , est

$$Aap + Bbq + Ccr,$$

quantité constante, vu que  $R$  et  $gM$  sont parallèles à  $Oz$ .  
Donc, à cause de  $r = n$ ,

$$(1) \quad Aap + Bbq + Ccn = l.$$

Je désigne par  $\nu$  la vitesse du centre de gravité, par  $z$  son ordonnée; le principe des forces vives donne

$$(2) \quad A(p^2 + q^2) + Cn^2 + M\nu^2 = 2gMz + \text{constante.}$$

Soit  $GO = \zeta$ ; d'où  $z = -\zeta$ . Je supposerai nulles les valeurs initiales de  $p, q$ ; la valeur initiale de  $\zeta$  est  $\gamma$ , celle de  $\nu$  est zéro; donc  $l = Cn \cos \alpha$ , vu que  $OGP = \alpha$  au commencement  $t$

$$\text{constante} = Cn^2 - 2gM\gamma.$$

On connaît les angles  $\varphi, \psi, \theta$ , qui donnent

$$a = \sin \theta \sin \varphi, \quad b = \sin \theta \cos \varphi, \quad c = \cos \theta,$$

$$pdt = \sin \varphi \sin \theta d\psi + \cos \varphi d\theta,$$

$$qdt = \cos \varphi \sin \theta d\psi - \sin \varphi d\theta.$$

Ces dernières formules se démontrent fort simplement par la décomposition des rotations.

Comme, de plus,  $\nu = \frac{d\zeta}{dt}$ , l'équation (1) devient

$$A\beta \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + Cn(\zeta - \gamma) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vu que } \cos \theta = \frac{\zeta}{\beta}, \\ \sin^2 \theta = \frac{\beta^2 - \zeta^2}{\beta^2}, \end{array} \right.$$

et l'équation (2) devient, après élimination de  $d\psi$ ,

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} [A + M(\beta^2 - \zeta^2)] + \frac{C^2 n^2 (\zeta - \gamma)^2}{A} + 2gM(\zeta - \gamma)(\beta^2 - \zeta^2) = 0.$$

Soient  $A = Mk^2$ ,  $Cn = Mk\sqrt{2g\lambda}$ ; il vient

$$(3) \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = 2g(\zeta - \gamma)[\zeta^2 - \beta^2 + \lambda(\gamma - \zeta)] : (\beta^2 + k^2 - \zeta^2);$$

le diviseur est  $> 0$ ; l'équation  $\zeta^2 - \beta^2 + \lambda(\gamma - \zeta) = 0$  a pour racines

$$(4) \quad \zeta = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2}}{2},$$

quantités réelles, puisque  $4\lambda\gamma < \lambda^2 + 4\gamma^2 < \lambda^2 + 4\beta^2$ .

Cela posé, si  $\lambda\gamma - \beta^2 < 0$ , les racines sont de signes contraires; la première est  $> \beta$ , ce qui est évident si

$\lambda > 2\beta$ ; sinon, posons

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2} > 2\beta,$$

d'où, vu que  $\lambda < 2\beta$ ,

$$\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2 > (\lambda - 2\beta)^2$$

ou

$$4\lambda\gamma > -4\lambda\beta,$$

ce qui est évident. Ainsi, le numérateur de  $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$  est de la forme

$$(5) \quad 2g(\zeta - \gamma)[\zeta - (\beta + i^2)](\zeta + i'^2).$$

La valeur initiale de  $\zeta$  est  $\gamma$ , et ne saurait devenir  $> \gamma$ , vu que l'équation (5) deviendrait  $\leq 0$ ; donc  $\zeta$  vient  $< \gamma$ , et le centre de gravité de la toupie descend.

Donc  $\frac{d\zeta}{dt}$  sera  $< 0$ , et ce point continue de descendre

jusqu'à ce que la toupie *tombe*, ce qui change les conditions du mouvement. Soit  $\lambda\gamma - \beta^2 > 0$ ; les valeurs de l'équation (4) sont  $> 0$ . La première est toujours  $> \beta$ ; la seconde est  $< \gamma$ . Cela est évident si  $\lambda < 2\gamma$ ; sinon, en posant

$$\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma' + 4\beta^2} > 2\gamma,$$

on trouve

$$4\gamma' < 4\beta^2.$$

Donc, etc.

Par suite, le numérateur de  $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$  est de la forme

$$2g[\zeta - (\beta + i')](\zeta - \gamma)(\zeta - \gamma_1),$$

où  $\gamma_1 < \gamma$ .

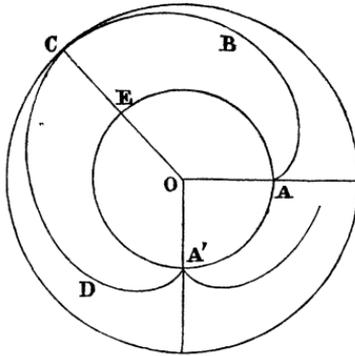
On voit que  $\zeta$  ne sera jamais  $> \gamma$ ; il commencera par décroître jusqu'à  $\gamma_1$ , mais ne pourra jamais devenir  $< \gamma$ , sans quoi  $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$  serait  $< 0$ . Donc, lorsque  $\zeta = \gamma_1$ , d'où

$\frac{d\zeta}{dt} = 0$ ,  $\zeta$  augmentera,  $\frac{d\zeta}{dt}$  sera  $> 0$ , et le centre de gravité remontera jusqu'à  $\zeta = \gamma$ . Par conséquent, G oscillera sur sa verticale entre les limites  $\zeta = \gamma$ ,  $\zeta = \gamma_1$ , et ces oscillations sont évidemment isochrones. La durée d'une oscillation ascendante, comme celle d'une descendante, est

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma} \frac{d\zeta \sqrt{\beta^2 + k^2 - \zeta^2}}{2g(\zeta - \gamma)(\zeta' - \lambda\zeta + \lambda\gamma - \beta^2)}.$$

Le point P décrira autour de O une trajectoire qui sera renfermée entre deux conférences de cercles ayant pour centre commun ce point O, et pour rayons respectifs  $\sqrt{\beta^2 - \gamma^2} = \beta \cos \alpha$  et  $\sqrt{\beta^2 - \gamma_1^2}$ , puisque  $\zeta = \gamma$ ,  $\zeta = \gamma_1$ , sont les valeurs extrêmes de  $\zeta$ . Cette trajectoire, pour  $\zeta = \gamma$ , est normale au cercle intérieur; pour  $\zeta = \gamma_1$ , elle est tangente au cercle extérieur.

Fig. 2.



Car, pour le sommet du cône, on a

$$x = \beta \sin \psi \sin \theta, \quad y = -\beta \cos \psi \sin \theta;$$

d'où

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos \psi \cos \theta \cdot d\theta + \sin \theta \sin \psi d\psi}{\cos \psi \cos \theta \cdot d\theta + \sin \theta \cos \psi d\psi},$$

mais  $\frac{d\theta}{dz} = -\frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{1}{\beta \sin \theta}$  et  $\frac{d\zeta}{dt}$  est de la forme

$$(\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} \cdot E,$$

E s'annule avec  $\zeta = \gamma_1$ , mais non avec  $\zeta = \gamma$ .

$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(\gamma - \zeta)}{\beta A \sin^2 \theta}$ , que je représente par  $(\gamma - \zeta) F$ , et

l'équation (6) devient

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos \psi \cos \theta \cdot E (\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - \zeta) \sin \theta \sin \psi \cdot F}{\sin \psi \cos \theta \cdot E (\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - \zeta) \sin \theta \cos \psi \cdot F} \\ &= \frac{-\cos \psi \cos \theta \cdot E + (\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \psi \cdot F}{\sin \psi \cos \theta \cdot E + (\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \psi \cdot F}. \end{aligned}$$

En A (fig. 2) où  $\zeta = \gamma$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\cot \psi$ ;

En C où  $\zeta = \gamma_1$ , E s'annule et  $\frac{dx}{dy} = \tan \psi$ .

Mais  $\psi$  est l'angle (fig. 2) que fait, avec Ox, la trace

du plan  $x_1 y_1$  sur  $xy$ , trace qui est perpendiculaire à  $OP$ , vu que les plans  $x_1 y_1$  et  $xy$  étant perpendiculaires au plan  $GOP$ , leur intersection est perpendiculaire à  $GOP$ , et, par suite, à  $GO$ . Si donc on pose  $POx = \chi$ , on a

$$\chi = \frac{3}{2} \pi + \psi;$$

donc en A (*fig. 2*),

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang } \chi,$$

en C,

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \chi \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La trajectoire se composera de branches telles que la courbe  $ACA'$ , qui est symétrique par rapport à  $OC$ . Ces branches seront en nombre fini ou infini, selon que l'arc  $AEA'$  est commensurable avec la circonférence ou non.

La symétrie résulte de ce que  $x^2 + y^2 = \zeta^2 \sin^2 \theta$  reprend les mêmes valeurs avec  $\theta$ , ainsi que  $d\psi$  avec  $d\zeta$ .

La vitesse angulaire  $\omega$  donne

$$\omega^2 = n^2 + p^2 + q^2 = n^2 + \frac{1}{k^2} \left[ 2g(\gamma - \zeta) - \frac{d\zeta^2}{dt^2} \right].$$

Elle a son maximum avec  $\zeta = \gamma$ , et  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ , lorsque G est (*fig. 1*) à la limite inférieure de sa course; le minimum est  $n$ , et a lieu à la limite supérieure.

Comme  $\sin \omega$ ,  $Oz_1 = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega}$  et que  $p^2 + q^2$  est nul lorsque  $\gamma = \zeta$ ,  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ , l'axe instantané revient coïncider avec  $Oz_1$ , chaque fois que le sommet du cône revient à la circonférence  $OA$ . Lorsque ce sommet est sur la circonférence  $CO$ ,  $d\theta$  est encore nul, et les trois rotations  $d\theta$ ,  $d\varphi$ ,  $d\psi$  se réduisent à deux dont les axes sont dans le plan  $PGO$ ; l'axe instantané est donc alors aussi dans ce plan.