

P.-A.-G. COLOMBIER

**Dérivées des divers ordres de deux fonctions
simples circulaires, et leurs applications**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 29-37

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_29_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉRIVÉES DES DIVERS ORDRES DE DEUX FONCTIONS SIMPLES
CIRCULAIRES, ET LEURS APPLICATIONS;**

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur de mathématiques, à Paris.

PROBLÈME I. *Trouver l'expression analytique de la dérivée d'un ordre quelconque de la fonction simple circulaire*

$$y = \text{arc tang } x.$$

Solution. Calculons plusieurs dérivées de la fonction donnée que nous exprimerons en fonction de y ; puis, en ayant égard, pour certaines transformations, aux pre-

nières formules de la trigonométrie rectiligne, nous reconnaitrons que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos y \cos \left(y + 0 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 1 \cdot \cos^2 y \cos \left(2y + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= 1 \cdot 2 \cos^3 y \cos \left(3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cos^4 y \cos \left(4y + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{d^5 y}{dx^5} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos^5 y \cos \left(5y + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Nous pourrions calculer encore plusieurs autres dérivées ; mais celles que nous venons de former suffisent pour mettre en évidence, dès la dérivée du second ordre inclusivement, leur loi de formation. Cette loi, qu'on peut traduire aisément en langage ordinaire, est exprimée analytiquement par la relation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cos^m y \cos \left(my + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (*).$$

Je dis que cette loi déduite de l'analogie est la loi générale de formation de toutes les dérivées de la fonction donnée, à partir de la seconde.

En effet, supposons que cette loi ait été vérifiée jusqu'à la dérivée de l'ordre m inclusivement, et calculons la dérivée de l'ordre $m+1$; il vient

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cos^{m+1} y \\ &\left[\sin y \cos \left(my + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \cos y \sin \left(my + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cos^{m+1} y \sin \left(\overline{m+1} \cdot y + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

(*) Cette formule se trouve (sauf la notation) dans les *Problèmes de Calcul différentiel*, par M. Leonce Clarke (page 11).

Mais si l'on observe que l'on a l'égalité

$$\sin\left(\overline{m+1} \cdot y + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\overline{m+1} \cdot y + m \frac{\pi}{2}\right),$$

on pourra écrire

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cos^{m+1}y \cos\left(\overline{m+1} \cdot y + m \frac{\pi}{2}\right).$$

Ce qui montre que la dérivée de l'ordre $m+1$ se forme identiquement d'après la loi qui a servi à écrire la dérivée de l'ordre m . Donc, en sous-entendant le raisonnement connu, il est vrai de dire que cette loi est générale.

Scolies. Nous avons fait remarquer que cette loi générale ne donne pas la première dérivée. On peut, cependant, en y introduisant une légère modification, la rendre telle, qu'elle donne toutes les dérivées sans exception. Il suffit, pour cela, de multiplier le coefficient de la dérivée de l'ordre m par $\frac{m}{m}$; ce qui n'en change pas la valeur numérique. Nous ferons remarquer encore que si l'on fait tour à tour $x = \pm \infty$, et $x = 0$, dans l'équation donnée, on trouve respectivement $y = \frac{\pi}{2}$, et $y = 0$.

Ce qui montre que, dans le premier cas, toutes les dérivées sont nulles, et que, dans le second, il n'y a que les dérivées d'ordre pair qui le soient.

Corollaire. Si l'on avait à trouver la dérivée de l'ordre m de la fonction circulaire monôme

$$y = A \text{ arc tang } ax,$$

A et α désignant des quantités indépendantes de x , on trouverait immédiatement que l'on a

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) A (\alpha \cos y)^m \cos\left(my + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Observation. Lorsque nous avons trouvé la solution du problème ci-dessus, nous ignorions qu'Arbogast eût

donné une autre solution du même problème dans son *Calcul des dérivations*, publié en 1800. Je dois ce renseignement bibliographique à M. le rédacteur des *Nouvelles Annales*. Arbogast, dans l'ouvrage que nous venons de citer, donne, à la page 316, pour dérivée d'un ordre quelconque de la fonction arc tang x ,

$$\frac{d^{n+1}(\text{arc tang } x)}{dx^{n+1}} = \mp 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \frac{2^n x^n}{(1+x^2)^{n+1}} \left[\begin{aligned} & 1 - (n-1) \frac{1+x^2}{2^2 x^2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{(1+x^2)^2}{2^4 x^4} \\ & - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{(1+x^2)^3}{2^6 x^6} + \dots \end{aligned} \right];$$

dans \mp , le signe supérieur est pour n impair, et l'inférieur est pour n pair.

Pour obtenir cette formule, Arbogast fait l'application d'une méthode qui donne la dérivée d'un ordre quelconque d'une fonction monôme ou polynôme, sans qu'il soit, pour cela, nécessaire de passer par les dérivées des ordres inférieurs (*).

PROBLÈME II. Développer la fonction arc tang x suivant les puissances croissantes, entières et positives de x .

Solution. En ayant égard au problème précédent, on trouve que

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm R.$$

Dans cette relation, la quantité $\pm R$ désigne le reste de la série. Ce reste, calculé d'après la formule de M. Cauchy, donne, en réduisant,

$$\pm R = \pm x \cos y, [x(1-\theta) \cos y]^{m-1} \cos \left(my + \overline{m-1} \cdot \frac{\pi}{2} \right);$$

d'après une remarque faite ci-dessus, m est toujours

(*) Méthode d'une extrême importance et toutefois peu étudiée Tm.

impair. On prend R avec le signe *plus*, ou avec le signe *moins*, selon que le résidu de l'ordre de la dérivée, par 4, est égal à *plus un*, ou à *moins un*. θ désigne une quantité positive plus petite que l'unité, et γ désigne ce que devient arc tang x , lorsqu'on y remplace x par θx .

Cherchons les conditions pour que la série ci-dessus, prolongée à l'infini, soit convergente. Remarquons que ses termes sont alternativement positifs et négatifs; dès lors, il faut chercher les conditions pour qu'ils décroissent indéfiniment. A cet effet, désignons par u_p, u_{p+1} les deux termes consécutifs de cette série et dont les rangs sont $p, p + 1$. On a

$$u_p = \pm \frac{x^{2p-1}}{2p-1}, \quad u_{p+1} = \mp \frac{x^{2p+1}}{2p+1};$$

les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs: d'où

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = -x^2 \left(1 - \frac{2}{2p+1} \right).$$

La quantité entre parenthèses est toujours comprise entre 0 et $+1$; elle n'est égale à $+1$ que pour $p = \infty$. Donc, pour que les termes de la série aillent en décroissant indéfiniment, lorsque p croît sans limite, il faut et il suffit que x ne soit pas en dehors des limites $+1$ et -1 . Dès lors, si x remplit cette condition, la série prolongée à l'infini est convergente, d'après un théorème connu; elle est encore convergente pour les valeurs particulières

$$x = +1, \quad x = -1.$$

Cela posé, pour que la série prolongée à l'infini ait pour somme arc tang x , les valeurs de x n'étant pas en dehors de $+1$ et -1 , il est nécessaire de démontrer que pour $m = \infty$ on a

$$\lim (\pm R) = 0.$$

Or, d'après la forme sous laquelle nous avons présenté le reste de la série, on voit que cette condition sera toujours satisfaite, si la valeur absolue de

$$x(1 - \theta) \cos \gamma_1 < 1,$$

ou si celle de x est < 1 . Mais cette dernière inégalité est évidemment satisfaite pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1 ; donc pour x , pris dans les mêmes limites, la série ci-dessus, prolongée à l'infini, a pour somme arc tang x , et l'on peut écrire, avec certitude,

$$(1) \quad \text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ à l'infini.}$$

Cette formule est encore exacte pour les valeurs particulières $x = +1$, $x = -1$, parce que le second membre reste convergent pour ces deux valeurs de x .

Historique. La formule (1), très-remarquable par sa simplicité et par ses applications, a été donnée par Godfrey-Guillaume Leibnitz, au commencement de l'année 1674, pendant le séjour qu'il fit à cette époque à Paris.

Observations. On peut arriver à la formule de Leibnitz en faisant usage des quantités imaginaires : 1° en employant la formule qui donne la tangente d'un arc en fonction d'exponentielles imaginaires; 2° en suivant une méthode due à M. Cauchy.

Corollaire. On peut transformer la formule de Leibnitz en une autre qui convienne aux valeurs des tangentes qui sont en dehors des limites $+1$ et -1 .

En effet, on a, quel que soit x ,

$$\text{arc tang } x + \text{arc tang } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\text{arc tang } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang } \frac{1}{x}.$$

x étant supposé en dehors de $+1$ et -1 , il s'ensuit que $\frac{1}{x}$ est renfermé dans ces mêmes limites; par conséquent, on peut développer $\text{arc tang } \frac{1}{x}$ d'après la formule de Leibnitz, et il vient

$$(2) \quad \text{arc tang } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots \text{ à l'infini.}$$

La formule (1) ne donne que des arcs compris entre 0 et $+\frac{\pi}{4}$ ou entre 0 et $-\frac{\pi}{4}$; la formule (2) ne donne que des arcs compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ou entre $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Par suite, ces deux formules serviront à connaître la grandeur d'un arc qui sort de ces limites, si l'on donne le nombre de fois que cet arc contient $\frac{\pi}{2}$, ainsi que le résidu de cette division.

PROBLÈME III. *Trouver le développement de arc tang $(x + h)$, ordonné suivant les puissances croissantes, entières et positives de h .*

Nous nous dispenserons de développer la solution de ce problème; nous nous bornerons à dire que l'on fait usage du problème I, et que le raisonnement est semblable à celui du problème II.

PROBLÈME IV. *Trouver l'expression analytique de la dérivée d'un ordre quelconque, de la fonction simple circulaire*

$$y = \text{arc cot } x.$$

Solution. Par un calcul et par des transformations

analogues à ceux que l'on a employés dans le problème I, on trouve que l'on a

$$\frac{dy}{dx} = (-1)^1 \sin y \sin y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \sin^2 y \sin 2y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \sin^3 y \sin 3y,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (-1)^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \sin^4 y \sin 4y,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = (-1)^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \sin^5 y \sin 5y.$$

En comparant les expressions de ces dérivées, on voit, à partir de la seconde, qu'elles se forment d'après une loi très-simple, dont l'expression analytique est

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \sin^m y \sin my.$$

En supposant que cette loi ait été vérifiée jusqu'à la dérivée de l'ordre m inclusivement, il sera facile de démontrer que la dérivée de l'ordre $m+1$ se forme de la même manière que la dérivée de l'ordre m ; par conséquent, cette loi est générale, et la dernière relation écrite ci-dessus donne la réponse au problème.

Scolies. Ils sont analogues à ceux du problème I.

Corollaire. Si la fonction donnée était de la forme

$$y = A \operatorname{arc} \cot \alpha x,$$

A et α désignant des quantités indépendantes de x , on trouverait la relation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) A \alpha \sin y)^m \sin my.$$

PROBLÈME V. *Trouver le développement de la fonction*

$$y = \text{arc cot } x,$$

suivant les puissances croissantes, entières et positives de x .

Solution. On peut opérer directement en s'aidant du problème IV ; mais, si l'on remarque que l'on a l'égalité

$$\text{arc tang } x + \text{arc cot } x = \frac{\pi}{2},$$

la question se trouve tout de suite résolue en vertu du problème II.