

BRETON DE CHAMP

Solution de la question 88

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 299-304

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__299_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 88

(voir t. III, p. 376) ;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Trois circonférences étant tracées sur un même plan, on propose de trouver sur ces circonférences, en ne faisant usage que du compas, trois points qui soient les sommets d'un triangle équilatéral. (E. PROUHET.)

Appelons P, Q, R (*) les trois circonférences données. D'un point quelconque p de la première, avec une ouverture de compas arbitraire, décrivez un arc qui coupe la seconde circonférence en q , puis de p et de q comme centres, avec la même ouverture de compas, décrivez des arcs qui se coupent en r . Ce dernier point sera le sommet d'un triangle équilatéral ayant pour côté pq . Si l'on construit de la même manière d'autres triangles équilatéraux $pq'r'$, $pq''r''$... ayant un sommet commun en p sur la circonférence P, et leurs sommets q' , q'' ... sur la circonférence Q, le lieu géométrique des points r , r' , r'' ... sera une circonférence de cercle, égale à Q; son centre, celui de Q et le point p étant les sommets d'un triangle équilatéral. Par suite de cette propriété, dont la démonstration est extrêmement facile, si le centre de Q est donné, on trouvera, en construisant ce triangle, le centre de la circonférence $rr'r''$..., de sorte que l'on pourra la décrire avec le compas. Les points où elle rencontrera la troisième circonférence R seront les sommets

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

des triangles équilatéraux demandés. Le sommet p étant pris à volonté, on voit que le problème est indéterminé.

Si les centres des circonférences P, Q, R ne sont pas donnés immédiatement, la construction sera modifiée comme il suit.

Ayant déterminé trois points r, r', r'' au moyen de la construction indiquée ci-dessus, faites passer par ces points une circonférence de cercle, en ne faisant usage que du compas, problème résolu dans la *Géométrie du compas* de Mascheroni (livre X, n° 150). On peut encore trouver le centre de l'une quelconque des circonférences tracées, en s'astreignant à la même condition, problème également résolu par cet auteur (livre X, n° 143), et alors le centre de la circonférence $r r' r'' \dots$ se construit comme on l'a expliqué en premier lieu.

PROBLÈME. *Quels sont, sur la circonférence P , les points qui fournissent des solutions de la question de M. Prouhet?*

Supposons que pour chaque point p de P on opère comme il a été dit ci-dessus, on aura une série de circonférences égales à Q , lesquelles donneront ou ne donneront pas de solutions suivant qu'elles couperont ou ne couperont pas R . Le lieu de leurs centres sera, ainsi qu'il est aisé de le voir, une circonférence égale à P , son centre formant, avec ceux de P et de Q , un triangle équilatéral. D'après cela, les arcs de cette circonférence interceptés entre les deux circonférences concentriques à R , que l'on obtient en augmentant et diminuant le rayon de celle-ci du rayon de Q , fourniront toutes les solutions qui se rapportent à la disposition adoptée pour les triangles équilatéraux. Il y aura, en général, deux arcs, égaux entre eux, qui se reporteront en vraie grandeur sur P en les faisant tourner de l'angle du triangle équilatéral autour du centre de Q , et les points de ces arcs répondront

seuls à la question. En adoptant une disposition symétrique, on pourra, selon les cas, trouver d'autres arcs, séparés ou réunis en un seul.

La recherche de ces arcs peut s'effectuer en ne faisant usage que du compas. Pour cela, il suffit de savoir décrire les deux circonférences concentriques à R, ou de construire avec le compas seul la somme et la différence de deux droites (Mascheroni, livre IV. n^{os} 72 et 73).

Note. Pour éviter aux lecteurs des *Nouvelles Annales* la peine de recourir à l'ouvrage de Mascheroni, je vais rappeler succinctement en quoi consistent les solutions dues à ce géomètre.

I. *Trouver le centre de la circonférence déterminée par trois points r, r', r'' .*

Des points r, r' , avec une ouverture de compas suffisante, décrivez deux arcs qui se coupent en A et B. Des points r' et r'' décrivez également deux arcs qui se coupent en C et D; on sait que le centre cherché est au point de rencontre des deux droites AB, CD.

Ces droites ne pouvant être tracées, puisque l'on ne fait usage que du compas, la solution ordinaire n'est plus admissible; on la remplace par celle que voici :

Des points A et B, avec les rayons AC, BC, décrivez deux arcs qui se coupent en c , point symétrique de C relativement à AB. Construisez semblablement le point d , symétrique de D relativement à AB. L'intersection des droites CD, cd sera le centre demandé. Or cette intersection O divise CD dans le rapport des longueurs Cc, Dd, c'est-à-dire que l'on a

$$OC : OD :: Cc : Dd,$$

d'où

$$OC : CD :: Cc : Cc + Dd.$$

OC est donc une quatrième proportionnelle aux lon-

guez $Cc + Dd$, Cc , CD , et il faut construire cette ligne avec le compas seul.

On remarquera que l'addition des deux longueurs Cc , Dd avec le compas seul, est un problème qui doit être préalablement résolu. A cet effet, des centres c et D , avec les rayons CD , Cc , décrivez deux arcs qui se coupent en d' ; la figure $Ccd'D$ sera un parallélogramme, et les deux droites dD , Dd' , étant parallèles à Cc , tomberont dans le prolongement l'une de l'autre, de sorte qu'on aura

$$dd' = Cc + Dd.$$

Cela posé, d'un point pris à volonté, avec les rayons dd' et Cc , tracez deux circonférences concentriques, et inscrivez dans la première une corde égale à CD . Des extrémités de cette corde, avec un rayon arbitraire, coupez la seconde circonférence en deux points; la distance de ces derniers sera égale à OC , c'est-à-dire quatrième proportionnelle aux deux rayons et à la corde CD . Cela résulte de ce que les déplacements simultanés des divers points d'une droite de longueur constante, dont les extrémités parcourent deux circonférences concentriques, sont vus, du centre commun, sous des angles égaux.

Connaissant donc la longueur OC , si des points C , c on décrit des arcs avec ce rayon, leur intersection donnera le centre O .

II. Une circonférence étant tracée, trouver son centre.

Soient E , F deux points pris à volonté sur la circonférence. De F comme centre, avec le rayon EF , tracez une nouvelle circonférence qui coupe la première en H , et déterminez la seconde extrémité G du diamètre EF en inscrivant consécutivement trois cordes égales au rayon EF . Des points F et G , avec le rayon GH , décrivez des arcs qui se coupent en I , et de ce dernier point comme centre,

avec le rayon GH, coupez la seconde circonférence en K; la corde EK sera le rayon de la circonférence donnée.

Pour le démontrer, il suffit de prouver qu'en décrivant des points E, F des arcs qui se rencontrent en L, on a

$$LH = LF,$$

c'est-à-dire que le point L est également distant des trois points E, F, H de la circonférence, propriété qui n'appartient qu'au centre.

On a l'angle

$$IFE = GIF + IGF.$$

Les deux triangles IFG, IFK sont égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun; de plus ils sont isocèles, de sorte que l'angle $IGF = IFK$. Retranchant des deux membres de l'égalité ci-dessus IFK, il vient

$$EFK = FIK.$$

Le triangle FEK, étant isocèle par construction de même que IFK, est semblable à ce dernier, et l'on a

$$IF : FK :: FK : EK,$$

ou

$$HG : GF :: EF : EL,$$

puisque, par construction,

$$IF = HG, \quad FK = GF = EF, \quad EK = EL.$$

Les deux triangles FGH, LEF étant isocèles, et ayant leurs côtés proportionnels, sont semblables entre eux, et, par suite, l'angle $LFE = FGH$. Mais $HFE = 2 FGH$; retranchant des deux termes de cette égalité respectivement les angles égaux LFE, FGH, il vient

$$LFH = FGH,$$

de sorte que l'angle $LFH = LFE$. Les deux triangles

LFE, LFH ayant ainsi un angle égal, le côté LF commun, et le côté FH = FE, sont égaux entre eux, et par conséquent LH = LE, ce qu'il fallait démontrer.

III. *Étant données deux lignes droites ST, UV, construire une troisième droite égale à leur somme ou à leur différence.*

On décrit de l'extrémité S de l'une de ces lignes, avec UV pour rayon, une circonférence qui rencontre la première en deux points dont les distances au point T sont la somme et la différence cherchées. Pour découvrir ces points, coupez de T, avec un rayon arbitraire, la circonférence en deux points m, n . Le problème revient évidemment à construire les milieux des deux arcs ainsi déterminés.

Des points m, n décrivez, avec le rayon UV, à partir du centre S, des arcs Sn', Sm' égaux l'un et l'autre à l'arc mn . Des centres m', n' , avec les rayons $m'm, n'n$, décrivez deux arcs qui se coupent en t . Enfin des mêmes centres, avec le rayon St , décrivez deux arcs : ils se couperont aux points cherchés.

En effet, les figures $Sn'mn, Sm'n m$ sont, par construction, des parallélogrammes, et $m'Sn'$ est une perpendiculaire à ST. Le carré de la distance du point S à l'un quelconque des points trouvés ci-dessus a pour valeur

$$\overline{St}^2 - \overline{Sm'}^2 = \overline{m'm}^2 - 2\overline{Sm'}^2 = \overline{Sm}^2 = \overline{UV}^2.$$

Ce qui prouve que ces points satisfont bien à la question (*).

(*) Voir *Manuel de géométrie*, 2^e édition, appendice.