NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARTOREY

Lieu géométrique relatif aux foyers des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 247-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__247_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE RELATIF AUX FOYERS DES CONIQUES

(voir t. IV, p. 325, 326, 327 et 401);

PAR M. MARTOREY,
Élève du lycée Charlemagne (division de M. Catalan).

PROBLÈME. *Trouver l'équation du lieu des foyers de toutes les courbes du second degré qui touchent en deux points donnés les deux côtés d'un angle donné.*

* *Que devient ce lieu lorsque les deux points de contact sont également éloignés du sommet de l'angle?*

1. Soit F le foyer d'une courbe du second degré, tangente en A et en B aux droites OA et OB.

Joignons ce foyer au point O, où concourent les tangentes, et aux points de contact A et B: la droite FO est la bissectrice de l'angle AFB.

Il résulte de là que le lieu proposé peut être défini comme celui des points tels, qu'en les joignant à trois points donnés, la droite intermédiaire soit la bissectrice de l'angle des deux autres droites.

Prenons pour pôle le point O et pour axe polaire la tangente OB. Soient a, b les distances OB, OA; θ l'angle des tangentes; ρ et ω les coordonnées d'un point du lieu.

Le triangle OFB fournit la relation

$$\frac{\sin \mathrm{OFB}}{\sin(\mathrm{OFB}+\omega)}=\frac{a}{\rho};$$

d'où

$$\rho \sin \mathrm{OFB} = a\,(\sin \mathrm{OFB} \cos\omega + \cos \mathrm{OFB} \sin\omega),$$

et, en divisant par cos OFB,

$$\rho \operatorname{tang} \mathrm{OFB} = a \cos\omega \operatorname{tang} \mathrm{OFB} + a \sin\omega.$$

De là,

$$\operatorname{tang} \mathrm{OFB} = \frac{a \sin\omega}{\rho - a\cos\omega}.$$

Le triangle AFO fournit de la même manière la tangente de l'angle OFA. On en obtient la valeur immédiatement en changeant dans l'expression précédente a en b, ω en $(\theta-\omega)$; on a ainsi

$$\operatorname{tang} \mathrm{OFA} = \frac{b \sin(\theta-\omega)}{\rho - b\cos(\theta-\omega)}.$$

Les deux angles AFO et OFB étant égaux, leurs tangentes sont égales, et réciproquement, puisque les angles que nous considérons sont inférieurs à deux droits; l'équation du lieu est donc

$$\frac{a \sin \omega}{\rho - a \cos \omega} = \frac{b \sin(\theta - \omega)}{\rho - b \cos(\theta - \omega)},$$

ou

$$\rho = \frac{ab \sin(2\omega - \theta)}{a \sin \omega - b \sin(\theta - \omega)}.$$

2. Avant de construire cette équation dans le cas général, examinons ce que devient le lieu lorsque $a = b$. L'équation se réduit à

$$\rho = \frac{a \sin(2\omega - \theta)}{\sin \omega - \sin(\theta - \omega)} = \frac{2a \sin \frac{2\omega - \theta}{2} \cos \frac{2\omega - \theta}{2}}{2 \sin \frac{2\omega - \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Elle se décompose en

$$\sin \frac{2\omega - \theta}{2} = 0, \tag{1}$$

$$\rho = \frac{a \cos\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos \frac{\theta}{2}}. \tag{2}$$

La première équation donne

$$\omega = \frac{2}{\theta}, \qquad \omega = 180 + \frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire qu'elle représente la bissectrice de l'angle des tangentes.

En prenant pour unité la longueur $\dfrac{a}{\cos \frac{\theta}{2}}$, on réduit la seconde équation à

$$\rho = \cos\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right),$$

et, en faisant tourner l'axe polaire de l'angle $\frac{\theta}{2}$, on a à construire la formule

$$\rho = \cos \omega,$$

laquelle représente une circonférence. Cette circonférence passe par le point O, et par les points A et B.

Par conséquent, le lieu se compose de la bissectrice de l'angle des tangentes, et de la circonférence qui passe par les deux points donnés et par le point de concours des tangentes.

3. Actuellement construisons la courbe dans le cas général.

Les valeurs de ω qui rendront nul le rayon vecteur sont fournies par l'équation

$$\sin(2\omega - \theta) = 0.$$

De cette équation on tire

$$\omega = \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 90 + \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 180 + \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 270 + \frac{\theta}{2}.$$

Les directions correspondantes des rayons vecteurs, c'est-à-dire les bissectrices de l'angle des tangentes, seront des tangentes à l'origine. Car chacune de ces directions peut être considérée comme la limite des positions d'une sécante de la courbe, tournant autour de l'un des points d'intersection, jusqu'à ce que deux points d'intersection se confondent en un seul.

Les valeurs de ω qui rendront le rayon vecteur infiniment grand sont données par l'équation

$$a \sin \omega - b \sin(\theta - \omega) = 0;$$

d'où

$$\frac{\sin \omega}{\sin(\theta - \omega)} = \frac{b}{a}.$$

La direction indiquée par cette équation est celle de la seconde diagonale du parallélogramme construit avec les distances a et b pour côtés adjacents. On reconnaît facilement que la courbe a une asymptote parallèle à cette diagonale.

La courbe passe par les points de contact, présente un nœud à l'origine, point pour lequel les tangentes à la courbe sont les bissectrices de l'angle des tangentes.

En appliquant la règle pour trouver la tangente en un point quelconque de la courbe, on trouve

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin(2\omega - \theta)[a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega)]}{2\cos(2\omega - \theta)[a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega)] - \sin(2\omega - \theta)[a \cos\omega + b \cos(\theta - \omega)]}.$$

Si l'on fait $\omega = \theta$, c'est-à-dire si l'on cherche la tangente au point A, l'équation se réduit à

$$\operatorname{tang} V = \frac{a \sin\theta}{a \cos\theta - b}.$$

Or, si nous abaissons la perpendiculaire BP sur OA,

$$BP = a \sin\theta, \quad OP = a \cos\theta;$$

donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{BP}{AP}, \qquad V = PAB.$$

De la même manière, pour $\omega = 0$, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{b \sin\theta}{a - b \cos\theta},$$

et l'on reconnaît que

$$V = ABO.$$

Donc les tangentes à la courbe aux points A et B font avec les rayons vecteurs des angles égaux aux angles que la droite AB fait avec ces rayons vecteurs. Ceci pouvait se voir à priori.

4. Pour trouver le degré de la courbe, nous passerons,

par une transformation de coordonnées, aux axes rectangulaires. A cet effet, nous posons,

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega,$$

en prenant pour axe des abscisses l'axe polaire, et pour axe des coordonnées une perpendiculaire à l'axe polaire élevée par l'origine.

L'équation développée donne

$$a\rho \sin \omega - b\rho(\sin \theta \cos \omega - \sin \omega \cos \theta)$$
$$= ab(\sin 2\omega \cos \theta - \cos 2\omega \sin \theta);$$

d'ailleurs

$$\sin 2\omega = \frac{2xy}{\rho^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \qquad \cos 2\omega = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}:$$

on a donc, pour équation transformée,

$$[ay - b(x \sin \theta - y \cos \theta)](x^2 + y^2)$$
$$= ab[2xy \cos \theta - (x^2 - y^2) \sin \theta].$$

Ainsi le lieu est une courbe du troisième degré.