

RICHELOT

Note sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 228-232

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__228_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ÉLIMINATION,

D'APRÈS M. RICHELOT.

Journal de M. Crelle, t. XXI. p. 226, 1841; en latin.

Méthode Sylvester.

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions rationnelles entières en y , savoir :

$$1) \quad \begin{cases} f_1 = a'_m y^m + a'_{m-1} y^{m-1} + \dots + a'_0 = 0, \\ f_2 = a''_n y^n + a''_{n-1} y^{n-1} + \dots + a''_0 = 0. \end{cases}$$

Multiplions l'équation $f_1 = 0$ successivement par y^{n-1} , y^{n-2} , ..., y^0 , et de même, l'équation $f_2 = 0$ par y^{m-1} , y^{m-2} , ..., y^0 ; nous obtenons $m+n$ équations *linéaires* relativement aux quantités y^{m+n-1} , y^{m+n-2} , ..., y^0 . Éliminant entre ces $m+n$ équations du premier degré, comme autant d'inconnues, les $m+n-1$ puissances, y^{m+n-1} , y^{m+n-2} , ..., y^1 , on obtient une équation entre les coefficients a' , a'' . Or, dans toutes ces équations, la quantité entièrement connue est nulle; donc on ne peut en déduire que le rapport entre les inconnues et le *déterminant* est nul. Ce *déterminant* étant représenté par X , on aura $X = 0$ pour l'équation finale, et sans facteurs étrangers, car les coefficients a' n'y dépassent pas le degré n , et les coefficients a'' le degré m ; car Euler a démontré que toute fonction entière évanouissante de a' et a'' , qui jouit de cette propriété, représente la *véritable* équation finale (voir tome VII, page 163).

Observation. Cette belle méthode se trouve dans le

journal *the London and Edinburgh philosophical Magazine and Journal of Science*, 1839 ou 1840 (*).

Méthode d'Euler.

2. Prenons deux fonctions entières π_1 et π_2 ; la première, de degré $n - 1$, renfermant n coefficients *arbitraires*, et la seconde, de degré $m - 1$, renfermant m coefficients *arbitraires*. La fonction $\pi_1 f_1 + \pi_2 f_2$ de degré $m + n - 1$ contient $m + n$ coefficients arbitraires, et les puissances $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \dots, y^0$. Soit y^h une quelconque de ces puissances : faisons son coefficient égal à un , et les coefficients des $m + n - 1$ autres puissances égaux à zéro; nous aurons $m + n$ équations du premier degré qui déterminent les $m + n$ coefficients arbitraires, et l'on a

$$2) \quad \pi_1 f_1 + \pi_2 f_2 = y^h.$$

Soit Δ le *déterminant* dans les $m + n$ équations, et faisons

$$\pi_1 \Delta = \rho_1^{(h)}, \quad \pi_2 \Delta = \rho_2^{(h)};$$

il est évident que $\rho_1^{(h)}$ et $\rho_2^{(h)}$ sont des fonctions entières de a' et a'' , et l'on a

$$3) \quad \rho_1^{(h)} f_1 + \rho_2^{(h)} f_2 = \Delta y^h.$$

Or, f_1 et f_2 étant nuls, on a aussi $\Delta = 0$; et comme Δ renferme a' au degré n et a'' au degré m , cette équation est donc l'équation finale et identique avec $X = 0$. Ainsi

$$4) \quad \rho_1^{(h)} f_1 + \rho_2^{(h)} f_2 = X y^h.$$

() Méthode si facile, que son absence dans l'enseignement est un fait inexpliqué ni explicable. MM. Choquet et Serret n'en parlent point.

3. Soit a'_π un quelconque des coefficients de f_1 , et prenant la dérivée de l'équation (4) par rapport à a'_π , faisons ensuite

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

il vient

$$y^h \left(\frac{dX}{da'_\pi} \right) = \rho_1^h \left(\frac{df_1}{da'_\pi} \right) = \rho_1^h y^\pi,$$

d'où

$$(5) \quad y^{h-\pi} \left(\frac{dX}{da'_\pi} \right) = \rho_1^h,$$

et, de la même manière,

$$(6) \quad y^{h-\pi} \left(\frac{dX}{da''_\pi} \right) = \rho_2^h,$$

où π est un des nombres $0, 1, 2, \dots, n$. Faisons $h = \pi$, on obtient

$$(7) \quad \rho_1^{(h)} = \frac{dX}{da'_h}, \quad \rho_2^{(h)} = \frac{dX}{da''_h}.$$

Dans la première équation, h ne doit pas dépasser m , et dans la seconde, h ne doit pas dépasser n .

Observation. L'auteur tire des équations (7), combinées avec les équations (5) et (6), des équations désignées par (8), (9), (10), et analogues à celles qui ont été trouvées par M. Jacobi (*voir* tome VII, page 158).

Deux équations à deux inconnues.

4. Supposons que les coefficients a', a'' , dans les fonctions f_1, f_2 ci-dessus, soient des fonctions de x , et ordonnant par rapport à x , l'on ait

$$(11) \quad \begin{cases} f_1 = b'_p x^p + b'_{p-1} x^{p-1} + \dots + b'_0 = 0, \\ f_2 = b''_q x^q + b''_{q-1} x^{q-1} + \dots + b''_0 = 0, \end{cases}$$

où b', b'' désignent des fonctions entières de y .

Soit l'équation finale $Y = 0$.

Si nous représentons par $\sigma_1^{(h)}$, $\sigma_2^{(h)}$, les fonctions entières les plus simples de b' et b'' analogues aux fonctions ρ , on aura, comme ci-dessus (3),

$$(12) \quad \sigma_1^{(h)} f_1 + \sigma_2^{(h)} f_2 = Y x^h,$$

et

$$(13) \quad \begin{cases} x^{h-\gamma} \left(\frac{dY}{db'_\gamma} \right) = \sigma_1^{(h)}, \text{ analogue à l'équation (5),} \\ x^{h-\gamma} \left(\frac{dY}{db''_\gamma} \right) = \sigma_2^{(h)}, \text{ analogue à l'équation (6).} \end{cases}$$

5. Les équations $X = 0$, $Y = 0$, sont, comme on sait, de même degré. Il s'agit de trouver le caractère de *correspondance* des racines.

L'équation (5) donne

$$y^{h-\pi+1} \left(\frac{dX}{da'_{\pi-1}} \right) = \rho^h;$$

d'où

$$y = \frac{\frac{dX}{da'_\pi}}{\frac{dX}{da'_{\pi-1}}},$$

et, de même,

$$y = \frac{\frac{dX}{da''_\pi}}{\frac{dX}{da''_{\pi-1}}};$$

π , dans la première valeur de y , est un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, m$; et, dans la seconde valeur, un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, n$. Mettant dans le

second membre une valeur de x , tirée de l'équation $X = 0$, le premier membre donne la valeur correspondante de y , déduite de l'équation $Y = 0$.

Observation. M. Liouville a trouvé depuis (en 1847) une autre méthode pour établir la relation entre les valeurs correspondantes, mais exigeant une nouvelle élimination, tandis que la méthode de M. Richelot ne porte que sur l'équation *finale* seulement (*voir* t. VI, p. 295).

Le reste du Mémoire contient un théorème analogue à celui que donne M. Jacobi (*voir* t. VII, p. 122 et 123), et on l'obtient par les mêmes moyens.