E. BRASSINE

Sur les séries qui expriment une racine réelle d'une équation algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__219_1>

SUR LES SÉRIES QUI EXPRIMENT UNE RACINE RÉELLE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE (*);

PAR M. E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

Représentons par $f(x) = 0$, une équation algébrique de la forme

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0;$$

supposons qu'on ait trouvé, en série convergente, le développement d'une racine réelle de cette équation, et que

(*) *Voir* LACROIX, *Calcul différentiel,* tome Ier, page 285, et M. MOIGNO, *Calcul différentiel*, tome Ier, page 162; 1840.

cette série s'annule par l'hypothèse $q = 0$, je dis qu'elle ne pourra représenter que la plus petite, numériquement, des racines de la proposée.

1°. Si l'équation est du second degré et de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

il est clair que la série convergente, qui exprimerait la racine qui s'annule en même temps que q, ne pourrait représenter, abstraction faite du signe, que la plus petite racine, comme le prouve évidemment l'expression

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2°. Si l'équation algébrique est du degré m, et si ses racines réelles, classées par ordre de grandeur, sont α, β, $\gamma, \ldots, \mu$, ρ, de telle sorte que α soit la plus petite, on pourra former avec ces racines les facteurs du second degré $(x-\alpha)(x-\beta)$, $(x-\alpha)(x-\gamma), \ldots, (x-\alpha)(x-\rho)$. La racine réelle exprimée en série, appartiendra nécessairement à un des facteurs du second degré; par exemple au facteur $(x-\alpha)(x-\gamma)$ que nous représenterons par $x^2 + kx + k'$. Cela admis, le premier membre de l'équation $f(x) = 0$, se mettra sous la forme

$$(x^2 + kx + k')(x-\beta)(x-\delta) \times \ldots \times (x-\rho).(x-\alpha')(x-\beta')\ldots,$$

α', $\beta', \ldots$ étant des racines imaginaires. Or la racine développée en série et qui appartient au facteur $x^2 + kx + k'$, devient nulle pour l'hypothèse $k' = 0$, puisque $k' = 0$ entraîne nécessairement $q = 0$ (q est le produit $k' \times \beta \times \delta \times \ldots \times \alpha' \times \beta' \ldots$). Donc la série qui développe la racine réelle de l'équation $f(x) = 0$, qui devient nulle pour la supposition $q = 0$, donne, si elle est convergente, la valeur approchée de la plus petite racine de cette équation.

3°. Si dans la proposée, les facteurs $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, etc., sont multiples, les raisonnements précédents existent encore; car α désignant la plus petite racine, on pourrait toujours supposer que la série développe une racine de l'équation du second degré $(x-\alpha)(x-\gamma)=0$. Dans ce cas, la proposée se mettrait sous la forme

$$(x^2+kx+k')(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{n'}\ldots=0.$$

L'hypothèse $k'=0$ rendant $q=0$, la racine développée serait égale à α.

4°. Appliquons ces considérations préliminaires à la série que Lagrange a donnée dans son grand ouvrage de la *Résolution des équations numériques* (Note XI). Si l'on considère l'équation

$$(1) \qquad u-x+f(x)=0,$$

u étant un paramètre quelconque, la série de Lagrange est (*)

$$F(x)=F(u)+F'(u)\times f(u)+\tfrac{1}{2}[F'(u)\times f(u)^2]' + \frac{1}{2.3}[F''(u)\times f^3(u)]''+\ldots;$$

les accents indiquent, suivant la notation de l'illustre géomètre, des dérivées successives des fonctions qu'ils affectent. Dans le cas particulier où l'on voudrait développer une racine x de l'équation (1), la série deviendrait

$$(2) \quad x=u+f(u)+\tfrac{1}{2}[f(u)^2]'+\frac{1}{2.3}[f(u)^3]''+\ldots;$$

mais $-x+f(x)=0$ pouvant représenter une équation quelconque, le développement précédent dans lequel on ferait $u=0$, après avoir effectué les opérations indiquées, exprimerait une de ses racines, s'il était convergent. D'après la notation ci-dessus,

$$-x+f(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+(p-1)x+q,$$

(*) Mémoires de Berlin. 1770.

posons

$$f(u) = u\varphi(u) + q,$$

d'où

$$\varphi(u) = u^{m-1} + au^{m-2} + \ldots + p.$$

On trouve

$$f(u)^m = q^m + mq^{m-1}u\varphi(u) + \frac{m(m-1)}{2}q^{m-2}u^2\varphi(u)^2 + \ldots$$
$$+ qu^{m-1}\varphi(u)^{m-1} + u^m\varphi(u)^m;$$

on substituera, en faisant successivement $m = 1, 2, 3,\ldots,$ ce développement dans la série (2). De cette substitution, il résulte que, si l'on fait $u = 0$, après les opérations indiquées, tous les termes de la série contiendront q, puisque $f(u)^m$ étant dérivé $m-1$ fois, le dernier terme $u^m\varphi(u)^m$, seul indépendant de q, sera nul par l'hypothèse $u = 0$. La valeur de x, exprimée par la série en termes réels, étant annulée lorsque $q = 0$, il résulte des principes exposés, que cette série donne la valeur approchée de la plus petite racine de l'équation

$$x^m + ax^{m-1} + \ldots + (p-1)x + q = 0.$$

Remarquons aussi que si la série est convergente, elle exprime nécessairement une racine réelle de la proposée; dans le cas de la convergence, la proposée doit donc avoir au moins une racine réelle. Si la série est divergente, elle correspond à une racine imaginaire, bien que tous ses termes soient réels. On a un exemple très-simple de cela, dans le développement par le binôme d'une racine imaginaire de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0;$$

en effet, on peut donner aux racines la forme

$$-\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1-h},$$

en faisant

$$h = \frac{4q}{p^2},$$

et supposant

$$h > 1.$$

Le développement $(1 - h)^{\frac{1}{2}}$ conduit à une suite divergente, en quantités réelles.

5°. Si l'on considère l'équation

$$(3) \qquad u - x + f(x) = 0,$$

et que dans la série (2) on ne fasse pas $u = 0$, on pourrait demander quelle serait la racine développée. Posons $x = u + y$; l'équation précédente deviendra

$$(4) \qquad y = f(u + y).$$

Au lieu de celle-là, considérons

$$y = \varepsilon + f(u + y),$$

ε étant un paramètre arbitraire; la série de Lagrange, appliquée à cette dernière, donne

$$y = \varepsilon + f(u + \varepsilon) + \tfrac{1}{2}[f(u + \varepsilon)^2]' + \frac{1}{2.3}[f(u + \varepsilon)^3]'' + \ldots.$$

Si l'on pose, après les opérations indiquées, $\varepsilon = 0$, on développera la plus petite racine y de l'équation (4), et son expression sera évidemment

$$y = f(u) + \tfrac{1}{2}[f(u)^2]' + \frac{1}{2.3}[f(u)^3]'' + \ldots,$$

c'est-à-dire, la valeur de $x - u$ qu'aurait fournie la série (2). Si donc on ne fait pas le paramètre u égal à zéro, et qu'on fasse usage de la série de Lagrange, on développera la plus petite valeur numérique de $x - u$, par suite la racine x qui diffère le moins du paramètre u. (Cette remarque est due à M. le professeur Chio, de Turin; elle se trouve dans un Mémoire non publié, sur lequel M. Cauchy a fait un Rapport (*Comptes rendus de l'Académie*, 1847, p. 492.)