

TERQUEM

**Solutions géométriques des questions
219, 220**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 212-215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_212_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 219, 220

(voir t. IX, p. 206).

1. *Lemme.* Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

2. *Lemme.* La directrice de toute parabole inscrite à un triangle passe par le point d'intersection des trois hauteurs du triangle. Les deux tangentes à la parabole passant par ce point, forment donc un angle droit.

3. *Lemme.* Un plan tangent à une sphère est rencontré par un système de diamètres conjugués en trois points, sommets d'un triangle; le point de contact est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

4. THÉORÈME. *Dans une sphère, les six diamètres de deux systèmes de diamètres conjugués sont les arêtes d'un cône du second degré.*

Démonstration. Soient O le centre de la sphère; OA , OB , OC trois demi-diamètres conjugués, et Oa , Ob , Oc trois autres demi-diamètres conjugués. Par le point A , menons un plan tangent; il est parallèle au plan COB . Désignons par a' , b' , c' les points où ce plan est rencontré par les trois diamètres du second système. A est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle $a'b'c'$ (*Lemme 3*). Une hyperbole équilatère quelconque, circonscrite au triangle $a'b'c'$, passe par le point A (*Lemme 1*): elle sera complètement déterminée si nous prenons OB , OC pour directions des asymptotes; donc le cône qui a son sommet en C et pour base l'hyperbole passe par les six arêtes Oa' , Ob' , Oc' , OA , OB , OC . C. Q. F. D.

Corollaire 1. Un plan quelconque coupe ces six arêtes en six points sur une conique.

Corollaire 2. Les six arêtes de deux angles solides trirectangles ayant même sommet, sont coupées par un plan en six points qui sont sur une conique; car les six arêtes peuvent être considérées comme formant deux systèmes de diamètres conjugués dans une sphère. C'est la question 219.

5. THÉORÈME. *Dans une sphère, les six plans diamétraux de deux systèmes de plans diamétraux conjugués sont tangents à un même cône du second degré.*

Démonstration. Mêmes données que dans le théorème précédent. Toute parabole inscrite au triangle $a'b'c'$ a une directrice qui passe par le point A (*Lemme 2*); elle sera complètement déterminée si nous prenons OB et OC pour directions des tangentes qui passent par A . Soient α , β , γ , δ , ε les cinq points de contact. Le cône $O\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ touche évidemment les cinq faces $Oa'b'$, $Oa'c'$, $Ob'c'$,

AOB, AOC ; mais le plan BOC étant parallèle au plan de la parabole $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$, touche le cône ; donc, etc. C'est la question 220.

6. *Lemme.* $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n$ étant les coordonnées de n points, si l'on remplace partout x, y, z par ax, by, cz , en conservant les indices et prenant de nouveaux axes à volonté, on obtient n nouveaux points correspondants.

1°. Si p des points du premier système sont sur une surface de degré q , les points correspondants sont sur une surface du même degré.

2°. Le point de moyenne distance des points du premier système a pour correspondant le point de moyenne distance du second système.

3°. Des droites parallèles ou des plans parallèles dans le premier système, ont pour correspondants des droites parallèles et des plans parallèles dans le second système.

7. THÉORÈME. *Dans un ellipsoïde, les six diamètres de deux systèmes de diamètres conjugués sont les arêtes d'un cône du second degré, et les six plans diamétraux sont tangents à un cône du second degré.*

Démonstration. Soit

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2b^2c^2$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à des diamètres conjugués : remplaçons x, y, z respectivement par $\frac{bcx}{r}, \frac{acy}{r}, \frac{abz}{r}$; nous aurons

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Prenant ces nouveaux axes rectangulaires, la surface correspondante à l'ellipsoïde est une sphère : d'après le lemme précédent, les diamètres conjugués dans l'ellipsoïde ont pour correspondants des diamètres conjugués dans la sphère ; donc, etc.

Observation. Ce dernier théorème est de M. Chasles, qui l'a démontré en 1838 (voir le Journal de M. Liouville, tome III, page 398).

Comme on voit, c'est une transformation homologique du théorème de M. Steiner sur la sphère, énoncé sans démonstration, en 1832, dans son ouvrage *sur la dépendance des figures*, page 313. Il ajoute même que cette proposition est un cas particulier d'un théorème plus général.