NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE JUBÉ

Solution de la question 200

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 209-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__209_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 200

(voir t. VIII, p. 44) ;

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
Professeur au lycée de Saint-Omer.

Si un point P se meut dans un plan de manière que la somme des carrés des tangentes PA_1, PA_2, ..., menées de ce point à une courbe algébrique de degré n, située dans ce plan, soit constante, la normale en P, au lieu géométrique de P, passe par le centre de moyenne distance des centres de courbure de la courbe, correspondants aux points de contact A_1, A_2, ...

Démonstration. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée. α et β étant les coordonnées de P, x' et y' celles d'un point de contact A_1, ces quantités sont liées par la relation $\beta - y' = f'(x')(\alpha - x')$; et il y a une relation semblable pour chacun des autres points de contact. En considérant x' et y' comme coordonnées courantes dans cette équation, la courbe qu'elle représente coupe la première courbe aux points de contact des tangentes menées par le point P, de sorte que l'équation

$$(A) \qquad \beta - f(x') = f'(x')(\alpha - x')$$

est de degré $n(n-1)$, *première polaire* du point P.

Nommons x', x'', x''',..., les racines de cette équation, et y', y'', y''', ..., les ordonnées correspondantes à ces abscisses; puisque la somme des carrés des tangentes est constante, on doit avoir

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (x''-\alpha)^2 + (y''-\beta)^2 \ldots = K^2,$$

ou bien

$$(B)\quad \begin{cases} n(n-1)(\alpha^2+6^2)-2\alpha\sum x'-26\sum(x') \\ \qquad\qquad +\sum x'^2+\sum f(x')^2 = K^2. \end{cases}$$

On peut former $\sum x'$, $\sum f(x')$, $\sum x'^2$, $\sum f(x')^2$, au moyen des coefficients de l'équation (A); l'équation (B), qui ne contiendra plus alors que α et 6, appartiendra au lieu du point P.

La normale en P à ce lieu a pour équation

$$\eta - 6 = -\frac{d\alpha}{d6}(\xi - \alpha).$$

D'ailleurs, en nommant ξ', η', ξ'', η'', ..., les coordonnées des centres de courbure aux points A_1, A_2, ..., on a

$$\xi' - x' = -\frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')}, \quad \eta' - y' = \frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}; \ldots,$$

et si X et Y sont les coordonnées du centre de gravité de ces centres de courbure,

$$n(n-1)X = \xi' + \xi'' + \ldots, \quad n(n-1)Y = \eta' + \eta'', \ldots,$$

ce qui donne

$$n(n-1)X = \sum x' - \sum\frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')},$$

$$n(n-1)Y = \sum f(x') + \sum\frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}.$$

Remplaçant dans l'expression de la normale ξ et η par X et Y, j'obtiens

$$(C)\quad \begin{cases} \sum f(x')\,d6 + \sum\frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}\,d6 - n(n-1)6\,d6 \\ + \sum x'\,d\alpha - \sum\frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')}\,d\alpha - n(n-1)\alpha\,d\alpha; \end{cases}$$

expression identiquement nulle, car en y ajoutant membre à membre la différentielle de l'équation (B) qui est

$$n(n-1)\alpha d\alpha + 6d6) - \alpha\sum dx' - \sum x'd\alpha - 6\sum f'(x')dx'$$
$$- d6\sum f(x') + \sum x'dx' + \sum f''(x')f'(x')\,dx,$$

on obtient

$$\sum\left\{\frac{1}{f''(x'')}[1+f'(x')^2][(x'-\alpha)f''(x')dx'+d6-f'(x')\,d\alpha]\right\},$$

qui est identiquement nul, puisque la différentielle de l'équation (A) donne

$$(x'-\alpha)f''(x')dx' + d6 - f'(x')\,d\alpha = 0.$$

La normale en P passe donc par le centre de gravité des centres de courbure correspondants aux points de contact.

Remarque. M. Lemonnier, professeur au lycée de Nantes, nous a adressé une autre solution analytique, comprise dans la solution géométrique qui suit.