

LÉON BENOIT

AUGUSTE HERBÉ

**Solution de la question 194**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 9  
(1850), p. 172-174

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1850\\_1\\_9\\_\\_172\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__172_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTION DE LA QUESTION 194**

( voir t. VII, p. 368 ).

**PAR MM. BENOIT (LÉON) ET HERBÉ (AUGUSTE),**

Élèves de mathématiques supérieures au lycée de Reims

( classe de M. Sornin ).

1. On distingue trois sortes de polygones plans : 1<sup>o</sup> les polygones convexes ; 2<sup>o</sup> les polygones à angles rentrants ; 3<sup>o</sup> les polygones étoilés.

2. **PROBLÈME.** *Dans un quadrilatère plan, ayant deux angles opposés droits, étant donnés deux côtés consécutifs et l'angle compris entre ces côtés, trouver l'aire du quadrilatère en fonction des données.*

*Solution.* Un tel quadrilatère est nécessairement convexe.

1<sup>er</sup> cas. *Quadrilatère non étoilé.* Soient O, A, O', A' les sommets du quadrilatère ; A, A' deux angles opposés droits ; OA = a, OA' = a' ; angle AOA' = α : on obtient facilement

$$A'O' \sin \alpha = a - a' \cos \alpha, \quad AO' = a' - a \cos \alpha.$$

Désignant par S l'aire du quadrilatère, on a

$$2S = aa' \sin \alpha + \frac{(a - a' \cos \alpha)(a' - a \cos \alpha)}{\sin \alpha},$$

$$2S \sin \alpha = 2aa' - (a^2 + a'^2) \cos \alpha = 4aa' \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - (a + a')^2 \cos \alpha.$$

*Autrement.* Prolongeons AO' et OA' jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en I, on a

$$2S = 2(AIO - O'IA'),$$

ou

$$2 \text{ AOI} = \overline{\text{AO}}^2 \cdot \text{tang } \alpha = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad 2 \text{ O'IA}' = \frac{(a - a' \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha};$$

d'où

$$2 \text{ S} \sin \alpha = 2 aa' - (a^2 + a'^2) \cos \alpha,$$

comme ci-dessus.

2<sup>e</sup> cas. *Quadrilatère étoilé.* Le point d'intersection I est sur les côtés AO', A'O non prolongés, alors l'expression  $\frac{2aa' - (a^2 + a'^2) \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$  est toujours la différence des aires des triangles AIO et O'IA'; et c'est seulement de cette différence dont on a besoin dans la question 194 qui suit.

3. PROBLÈME. *Connaissant en grandeur et en direction les perpendiculaires abaissées d'un point O sur les côtés d'un polygone plan, trouver l'aire du polygone en fonction des données.*

*Solution.* Soit  $n$  le nombre des côtés du polygone et aussi le nombre des perpendiculaires abaissées du point O sur ces côtés : on formera ainsi  $n$  quadrilatères ayant chacun deux angles opposés droits. Désignons les côtés successifs par les nombres 1, 2, 3, ...,  $n$ ; et de même les perpendiculaires par  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ;  $p_r, p_{r+1}$  étant deux perpendiculaires consécutives, l'aire du quadrilatère correspondant sera (§§ 2 et 3)

$$\frac{2 p_r p_{r+1} - (p_r^2 + p_{r+1}^2) \cos(p_r, p_{r+1})}{2 \sin(p_r, p_{r+1})},$$

et l'aire du polygone est égale à la somme de  $n$  expressions de cette forme. Il n'y a de difficultés que pour les signes : on les détermine ainsi. Du point O comme centre, et d'un rayon quelconque, on décrit une circonférence : allant d'une perpendiculaire à la suivante, toutes les fois qu'on marche dans le même sens, de 1 à 2, on prend l'expression

telle qu'elle est , et quand on marche dans le sens inverse, on prend l'expression avec le signe opposé ; car le signe d'une des perpendiculaires devient négatif, et  $\alpha$  se change dans  $2^{\circ} - \alpha$ . Il suffit de faire une figure pour se convaincre de la justesse de cette détermination de signes.

---