NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON BENOIT

Question d'examen, problème IV

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 145-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__145_0>

QUESTION D'EXAMEN, PROBLÈME IV

(Arithmétique de M. Bertrand, p. 226);

PAR M. LÉON BENOIT,
Élève au lycée de Reims.

1. *Lemme.* a et b étant premiers entre eux et irrationnels quadratiques, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Démonstration. Si cette somme est rationnelle, le carré de cette somme est aussi rationnel; donc $\sqrt{ab}$ est rationnel, ce qui est impossible.

2. *Lemme.* a, b, c n'ayant pas de facteurs communs et étant irrationnels quadratiques, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ est irrationnel.

Démonstration: Si cette somme est rationnelle, le carré est aussi rationnel; donc $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=r$, où r est une quantité rationnelle. Élevant au carré, on trouve $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=s$, où s est encore une quantité rationnelle. Éliminant un des radicaux, on trouve la somme de deux radicaux égale à une quantité rationnelle, ce qui est contraire au lemme précédent; donc, etc.

3. THÉORÈME. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ *ne peuvent faire partie d'une même progression, soit par différence, soit par quotient.*

Démonstration.—Par différence. r étant la raison, on a

$$\sqrt{5}=\sqrt{2}+nr,\quad \sqrt{7}=\sqrt{2}+n'r,\quad \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{n'}{n},$$

où $\frac{n'}{n}$ est une quantité rationnelle. Multipliant la fraction à gauche, haut et bas, par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, il vient

$$\frac{\sqrt{35} - \sqrt{10} + \sqrt{14} - 2}{3} = \frac{n'}{n}.$$

Il faut que $\sqrt{5} + \sqrt{14} - \sqrt{10}$ soit rationnel, ce qui est impossible (*lemme* 2); donc, etc.

Par quotient.

$$\sqrt{5} = q^n \sqrt{2}, \quad \sqrt{7} = q^{n'} \sqrt{2};$$

d'où

$$q = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2n'}}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{2n'} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2n}, \quad 5^{n'}.2^{n} = 7^{n}.2^{n};$$

n et n' étant des nombres entiers, cette équation est évidemment impossible; donc, etc.