

LÉON BENOIT

Question d'examen, problème IV

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 145-146

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN, PROBLÈME IV

(Arithmétique de M. Bertrand, p. 226);

PAR M. LÉON BENOIT,
Élève au lycée de Reims.

1. *Lemme.* a et b étant premiers entre eux et irrationnels quadratiques, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Démonstration. Si cette somme est rationnelle, le carré de cette somme est aussi rationnel; donc \sqrt{ab} est rationnel, ce qui est impossible.

2. *Lemme.* a, b, c n'ayant pas de facteurs communs et étant irrationnels quadratiques, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est irrationnel.

Démonstration: Si cette somme est rationnelle, le carré est aussi rationnel; donc $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} = r$, où r est une quantité rationnelle. Élevant au carré, on trouve $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} = s$, où s est encore une quantité rationnelle. Éliminant un des radicaux, on trouve la somme de deux radicaux égale à une quantité rationnelle, ce qui est contraire au lemme précédent; donc, etc.

3. THÉORÈME. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ne peuvent faire partie d'une même progression, soit par différence, soit par quotient.

Démonstration.—Par différence. r étant la raison, on a

$$\sqrt{5} = \sqrt{2} + nr, \quad \sqrt{7} = \sqrt{2} + n'r, \quad \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{n'}{n},$$

où $\frac{n'}{n}$ est une quantité rationnelle. Multipliant la fraction à

gauche, haut et bas, par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, il vient

$$\frac{\sqrt{35} - \sqrt{10} + \sqrt{14} - 2}{3} = \frac{n'}{n}.$$

Il faut que $\sqrt{5} + \sqrt{14} - \sqrt{10}$ soit rationnel, ce qui est impossible (*lemme 2*); donc, etc.

Par quotient.

$$\sqrt{5} = q^n \sqrt{2}, \quad \sqrt{7} = q^{n'} \sqrt{2};$$

d'où

$$q = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2n'}}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{2n'} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2n}, \quad 5^{n'} \cdot 2^n = 7^n \cdot 2^n;$$

n et n' étant des nombres entiers, cette équation est évidemment impossible; donc, etc.