

Calcul infinitésimal

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 127-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__127_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL INFINITÉSIMAL.

SUR LES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES ; par M. le professeur *Raabe*. (Extrait des *Mémoires de la Société des Investigateurs de la nature*, à Zurich, en allemand; 1848.)

C'est une Note que M. E. Catalan a insérée dans le

XIII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, qui est l'objet du présent Mémoire.

Soit

$$(1) \quad F(x, y, a) = 0$$

une équation finie entre deux variables x, y et une constante a ; différentiant cette équation et éliminant a , on obtient

$$(2) \quad F'(x, y, y') = 0.$$

a ayant une valeur quelconque, l'équation (1) est une intégrale *particulière* de l'équation (2), et correspondante à cette valeur; mais si l'on élimine a entre l'équation (1) et l'une quelconque des deux équations

$$(3) \quad \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{dF(x, y, a)}{da} = \frac{1}{0},$$

on obtient des équations qui sont aussi des intégrales de l'équation (2), désignées, d'après Lagrange, sous le nom d'*intégrales singulières*.

M. Catalan a fait voir que le résultat de l'élimination entre (1) et (4) ne donne pas toujours des intégrales ni *singulières* ni *particulières*.

Exemple. Soit

$$(1) \quad F(x) = x + a - \sqrt{3 - (2y - a)} = 0.$$

L'équation (2) devient $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$; l'équation (4) donne $2y = a$, ce qui réduit $F(x)$ à $x + 2y = 0$, équation qui ne satisfait pas à l'équation (2). M. Raabe ajoute que le résultat de l'élimination de la constante entre les équations (1) et (3) est sujet à la même restriction. En effet, soit

$$(3) \quad F(x) = a(x - y) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} = 0;$$

c'est l'intégrale complète de l'équation

$$(4) \quad \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 :$$

faisant usage de l'équation (3), on parvient au résultat $x - y = 0$, équation qui ne satisfait pas à l'équation (2). Il s'agit de trouver la cause de ces restrictions.

Lorsque l'équation (1) a la forme explicite

$$(1) \quad y = f(x, a),$$

l'élimination de a entre cette équation et l'équation

$$(5) \quad \frac{dy}{da} = 0$$

donne toujours une solution singulière, sans aucune restriction. Lorsque la forme est implicite, on a

$$6 \quad \frac{dy}{da} = - \frac{\frac{dF(x, y, a)}{da}}{\frac{dF(x, y, a)}{dy}}.$$

Si l'on combine donc une seconde équation entre x, y, a , avec l'équation (1), et que l'on élimine a , si le résultat est tel que le second membre à droite de l'équation (6) s'anéantisse, alors on en tire la solution singulière; mais ce second membre ne devient nul qu'en posant le numérateur égal à zéro, pourvu que le dénominateur ne devienne pas zéro aussi: car alors $\frac{dy}{da} = \frac{0}{0}$, et il n'y a plus de solution singulière. De même, si les deux termes deviennent infinis simultanément, $\frac{dy}{da}$ est encore indéterminé. C'est ainsi que M. Raab explique les deux restrictions, et prend pour exemples les deux cas rapportés ci-dessus.