

CARNOT

Tétragonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 126-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__126_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TÉTRAGONOMÉTRIE

D'APRÈS CARNOT.

(Géométrie de position, p. 387)

(Voir tome IX, page 9)

Soit le quadrilatère ABCD ; désignant par a, b, c, d, x, y les côtés successifs AB, BC, CD, DA et les diagonales AC, BD ; angle BAC = α ; angle CAD = β .

Les triangles BAC, CAD, BAD donnent

$$\begin{aligned} (1) \quad & b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha, \\ (2) \quad & c^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \beta, \\ (3) \quad & y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A ; \end{aligned}$$

et l'on a

$$(4) \quad A = \alpha + \beta.$$

L'équation (4) donne

$$\cos A = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

d'où

$$(5) \quad 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 A + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos A = 0.$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans cette équation (5), les valeurs de

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos A ;$$

or

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + x^2 - b^2}{2ax}, \quad \cos \beta = \frac{d^2 + x^2 - c^2}{2dx}, \quad \cos A = \frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad}.$$

L'équation (5) devient

$$\begin{aligned} & 4b^2c^2x^2 + (b^2 + c^2 - y^2)(c^2 + x^2 - d^2)(b^2 + x^2 - a^2) \\ & = b^2(c^2 + x^2 - d^2)^2 + c^2(b^2 + x^2 - a^2)^2 + x^2(b^2 + c^2 - y^2)^2 ; \end{aligned}$$

réduisant, on obtient

$$\begin{aligned} & (a^2 c^4 + a^4 c^2 + b^4 d^2 + b^2 d^4 + x^2 y^4 + x^4 y^2) \\ & \quad + (a^2 b^2 x^2 + a^2 d^2 y^2 + b^2 c^2 y^2 + c^2 d^2 x^2) \\ = & a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + a^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 x^2 y^2 \\ & + b^2 c^2 d^2 + b^2 d^2 x^2 + b^2 d^2 y^2 + b^2 x^2 y^2 + c^2 x^2 y^2 + d^2 x^2 y^2. \end{aligned}$$

La loi de formation est évidente.

Il est à observer que cette équation ne contient que les deuxièmes et quatrièmes puissances des lettres qui y entrent; de façon que si l'on donne cinq éléments d'un quadrilatère, le sixième sera donné par une équation bi-carée, résoluble comme équation du deuxième degré.

Comment réduit-on l'équation du seizième degré (voir p. 10) à celle du quatrième?

Observation. La même méthode s'applique au quadrilatère sphérique. Il faut partir de l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

il serait utile d'en donner le développement.

Observation. La formule pour le quadrilatère rectiligne a été donnée par Euler, Lexell, Carnot. Biørnsen n'en parle pas dans sa Tétragonométrie; il ne considère que les cas où un angle est donné: ce qui donne lieu à quarante-deux problèmes, non compris les cas particuliers.
