

Sur la différentiation des fonctions de fonctions

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 119-125

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__119_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS ;

PAR M. T. A.,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

1. Dans les ouvrages élémentaires de calcul différentiel, on donne la manière d'obtenir les dérivées successives des fonctions de fonctions; mais on ne donne pas la loi de ces dérivées indépendamment les unes des autres. Ainsi, étant données les deux équations

$$z = F(y), \quad y = f(x),$$

on enseigne bien à trouver successivement

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \dots,$$

mais on ne donne pas le moyen de calculer immédiatement $\frac{d^n z}{dx^n}$, sans passer par les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, \dots , $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$.

Cependant, dès que l'on sort des éléments, et qu'on veut appliquer le calcul différentiel aux développements de fonctions un peu compliquées, développer, par exemple, le polynôme $(a + bx + cx^2 + \dots + px^m)^n$ suivant les puissances de x , on sent bientôt la nécessité de connaître la loi que suivent les dérivées successives. Non pas qu'on ne soit parvenu jusqu'ici à ces développements, mais les moyens employés pour cela sont détournés, fondés souvent sur des démonstrations peu rigoureuses, comme celles d'Arbogast, et quelquefois même uniquement sur l'induction.

Cette lacune a d'autant plus lieu d'étonner, que la recherche de $\frac{d^n z}{dx^n}$ est assez facile, comme on va le voir.

Soient les deux équations

$$z = F(y), \quad y = \varphi(x).$$

On aura

$$\frac{dz}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = F'(y) \varphi''(x) + F''(y) \varphi'(x)^2,$$

$$(1) \quad \frac{d^n z}{dx^n} = A_1 F'(y) + A_2 F''(y) + \dots + A_n F^{(n)}(y),$$

A_1, A_2, \dots, A_n étant des coefficients qui dépendent uniquement de $\varphi(x)$ et nullement de la fonction $F(y)$,

comme il est facile de le prouver, en montrant que si cette loi est vraie pour la dérivée $(n)^{ième}$, elle est vraie aussi pour la dérivée $(n+1)^{ième}$.

D'après cela, pour déterminer les coefficients A_1, A_2, \dots, A_n , il suffira de remplacer $F(y)$ par une fonction quelconque de y , e^{py} par exemple, et dans ce cas les coefficients A_1, \dots, A_n seront les coefficients qui multiplieront $p e^{py}$, $p^2 e^{py}$, \dots , $p^n e^{py}$ dans l'expression de $\frac{d^n e^{py}}{dx^n}$. Reste donc à trouver $\frac{d^n e^{py}}{dx^n}$.

Pour cela, j'observe que si nous développons $e^{p\varphi(x+h)}$ suivant les puissances de h , $\frac{d^n e^{p\varphi(x)}}{1.2.3\dots n}$ sera le coefficient de h^n dans ce développement. Or

$$\begin{aligned} e^{p\varphi(x+h)} &= e^{p\left[\varphi(x) + \varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots\right]} \\ &= e^{p\varphi(x)} \cdot e^{p\varphi'(x)h} \cdot e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}} \dots \end{aligned}$$

En développant $e^{p\varphi'(x)h}$, $e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}$, \dots , et effectuant le produit, on aura pour le terme général

$$\begin{aligned} e^{p\varphi(x)} \sum p^{m_1+m_2+\dots+m_n} &\frac{[\varphi'(x)]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1} \frac{[\varphi''(x)]^{m_2}}{1.2.3\dots m_2} \\ &\times \frac{[\varphi^{(n)}(x)]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n} h^{m_1+2m_2+\dots+nm_n}; \end{aligned}$$

par conséquent, si l'on pose

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n = n,$$

le coefficient de h^n sera

$$\frac{\frac{d^n e^{p\varphi}}{dx^n}}{1.2.3\dots n} = e^{p'\varphi(x)} \sum p^{m_1+m_2+\dots+m_n} \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1} \\ \times \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2.3\dots m_2} \dots \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n}.$$

De plus, il est évident que pour avoir, dans cette équation, le coefficient de $p^m e^{p\varphi}$, ou A_m , il ne faudra prendre que les termes pour lesquels on aura

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

Donc, en définitive, on aura

$$A_m = 1.2.3\dots n \sum \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1} \\ \times \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2.3\dots m_2} \dots \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n},$$

m_1, m_2, \dots, m_n étant des nombres entiers et positifs (y compris zéro) qui doivent satisfaire aux équations

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n = n,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = m.$$

Telle est la solution du problème. On peut la mettre sous une autre forme qui, quoique moins commode pour la pratique, est cependant plus concise.

En effet, en examinant la marche suivie plus haut, on verra qu'on a d'abord cherché dans le développement

$$\text{de } e^{p\left[\varphi'(x)h + \varphi''(\tau)\frac{h^2}{1.2} + \dots\right]} = e^{p[\varphi'(x+h) - \varphi(\sigma)]}$$

le terme en h^n ; et, dans ce terme, on a pris seulement ce qui était multiplié par p^m . Or l'on peut, évidemment, faire l'inverse, chercher d'abord le terme en p^m dans

le développement de $e^{p[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}$; ce terme est

$$\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{1.2.3\dots m},$$

et puis ne prendre dans ce terme que ce qui est multiplié par h^n , ou, comme $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ est divisible par h ,

le coefficient de h^{n-m} dans la fonction $\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{1.2.3\dots m}$.

Or ce coefficient est, d'après le théorème de Taylor,

$$\frac{d^{n-m}}{dh^{n-m}} \left[\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{h} \right]_0 \quad (\text{le zéro placé en flanc marquant qu'on doit faire } h = 0 \text{ après les différentiations}).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots(n-m)1.2.3\dots m} \cdot \frac{d^{n-m} \left[\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{h} \right]_0}{dh^{n-m}} \\ &= \frac{n.n-1\dots n-m+1}{1.2.3\dots m} \cdot \frac{d^{n-m} \left[\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{h} \right]_0}{dh^{n-m}}. \end{aligned}$$

On peut encore trouver $\frac{d^n z}{dx^n}$ par d'autres considérations.

En nommant i l'accroissement de y correspondant à l'accroissement h de x , on aura

$$i = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

et

$$\begin{aligned} F(y+i) &= F(y) + F'(y) i + \dots + \frac{F^{(n)}(y)}{1.2.3\dots n} i^n + \dots \\ &= F(y) + \frac{dF(y)}{dx} h + \dots + \frac{d^n F(y)}{dx^n} \frac{h^n}{1.2.3\dots n} + \dots, \end{aligned}$$

en supposant que dans $F(y)$ on ait remplacé y par $\varphi(x)$, et changé ensuite x en $x+h$.

Remplaçons i par sa valeur dans l'équation ci-dessus, en observant que $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ est divisible par h , et que par suite le terme en h^n dans i^m est

$$\frac{d^{n-m} \left[\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right]^m}{1.2.3 \dots n - m dh^{n-m}},$$

et identifiant les termes en h^n , on aura, en posant pour abrégé,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \theta, \\ \frac{d^n F(y)}{1.2.3 \dots n dx^n} &= \frac{F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}}{1.2.3 \dots n-1} + \frac{F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}}{1.2.3 \dots n-2} + \dots \\ &+ \frac{F^{(m)}(y) \frac{d^{n-m}(\theta^m)_0}{dh^{n-m}}}{1.2.3 \dots n-m} + \dots + \frac{F^{(n)}(y) (\theta^n)_0}{1.2.3 \dots n}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} &+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} F'''(y) \frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}} + \dots \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on ait les trois équations

$$z = F(y), \quad y = \varphi(x), \quad x = f(u),$$

ou

$$z = \Phi(x) = \Pi(u).$$

En posant, comme précédemment,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta,$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} = \Phi^{(n)}(x) &= \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_o}{dh^{n-1}} \\ &+ \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_o}{dh^{n-2}} + \dots = U_n. \end{aligned}$$

Si donc nous posons de nouveau $\frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} = \omega$,

nous aurons

$$\frac{d^n \Phi(x)}{du^n} = \frac{d^n z}{du^n} = \frac{n}{1} U_1 \frac{d^{n-1}(\omega)_o}{d\varepsilon^{n-1}} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} U_2 \frac{d^{n-2}(\omega^2)_o}{d\varepsilon^{n-2}} + \dots$$

Remplaçant U_1, U_2, \dots, U_n par leur valeur, on trouvera facilement la loi pour les fonctions de fonctions de fonctions, et ainsi de suite pour un nombre quelconque de fonctions.
