

TERQUEM

Question d'examen sur le trapèze et le quadrilatère inscrits

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 98-99

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_98_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN SUR LE TRAPÈZE ET LE QUADRILATÈRE INSCRITS.

I. PROBLÈME. *Inscrire dans le cercle donné un trapèze dont l'aire et les côtés non parallèles, nécessairement égaux, sont donnés.*

Solution. Soit ABCD le trapèze inscrit; faisons

$$\begin{aligned} AD = BC = a, \quad AB = x, \quad CD = y, \\ AC = BD = z, \quad S = \text{aire}, \quad D = \text{diamètre.} \end{aligned}$$

La distance des deux bases AB, CD est égale à

$$\frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - (y - x)^2};$$

donc

$$S = \frac{1}{4} (x + y) \sqrt{4a^2 - (y + x)^2 + 4xy}.$$

Or dans le trapèze inscrit, l'on a

$$a^2 + xy = z^2;$$

donc

$$(1) \quad S = \frac{1}{4} (x + y) \sqrt{4z^2 - (x + y)^2}.$$

Soient s et s' les aires des triangles ABC, ACD; on a

$$axz = Ds, \quad ayz = Ds'; \quad \text{d'où} \quad az(x + y) = DS.$$

Remplaçant dans l'équation (1) $x + y$ par sa valeur, et faisant disparaître le radical, on déduit

$$(2) \quad 4a^2(D^2 - a^2)z^4 = D^2S^2;$$

on peut donc construire géométriquement z , et par conséquent le trapèze.

Au moyen de l'équation (2), connaissant trois des quatre quantités a, z, S, D , on peut construire la quatrième. S croissant proportionnellement au carré de z , il s'ensuit que S est un maximum lorsque z est un dia-

mètre, et alors le trapèze devient un rectangle inscrit.

On trouve aussi

$$a^2(x+y)^4 = 4S^2(D^2 - a^2),$$

ce qui donne la valeur de $x+y$, facile à construire de plusieurs manières. Soit A' le point diamétralement opposé à A ; on aura

$$DA' = \sqrt{D^2 - z^2} = b;$$

et faisant $S = 2al$, on obtient

$$bz' = D^2l, \quad (x+y)^2 = 4bl.$$

Observation. Pour le cas général du quadrilatère, voir tome VII, page 69.

II. Soient a, b, c, d les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit, m la diagonale qui va de l'angle ab à l'angle cd , et n la seconde diagonale : on aura

$$ac + bd = \frac{m^2(ab + cd)}{ad + bc} = \frac{n^2(ad + bc)}{ab + cd};$$

$$\cos(a, d) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}; \quad \cos(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + cd};$$

$$\sin(a, d) = \frac{2S}{ad + bc}; \quad \sin(a, b) = \frac{2S}{ab + cd};$$

$$S = \text{aire (v. t. VII, p. 70)}; \quad D^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{4S^2};$$

$$D = \text{diamètre du cercle circonscrit}; \quad \sin(a, m) = \frac{d}{D};$$

$$\sin(b, m) = \frac{c}{D}; \quad \sin(a, n) = \frac{b}{D}; \quad \sin(b, n) = \frac{a}{D};$$

$$\sin(m, n) = \frac{2S}{ac + bd}; \quad S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d);$$

$$2s = a + b + c + d.$$