NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN GILLES

Théorème sur le système de droites conjuguées à une conique et passant par un même point

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 87-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__87_1>

THÉORÈME SUR LE SYSTÈME DE DROITES CONJUGUÉES A UNE CONIQUE ET PASSANT PAR UN MÊME POINT;

PAR M. LUCIEN GILLES,
Élève du lycée Monge (**).

Toutes les circonférences circonscrites aux triangles formés par des systèmes de droites conjuguées passant par un même point pris sur le plan d'une ellipse, et par

(*) Prix de la souscription :
Pour Paris et les départements..... 15 francs par an.
Pour l'Étranger.................... 20
A Paris, chez M. BACHELIER, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, etc., quai des Augustins, n° 55.

(**) Maintenant élève de l'École Polytechnique.

une droite parallèle au diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point O, se coupent en un même point situé sur le diamètre qui passe par le point O (*fig.* 5, *Pl. I*).

En effet, soit A le centre de l'ellipse, prenons AO et son conjugué pour axes coordonnés; l'équation de la courbe sera

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

Soit DD′ la parallèle à l'axe des Y. Posons

$$\text{OA} = d \quad \text{et} \quad \text{AB} = p.$$

Soit $y = m(x - d)$ l'équation de OE; celle de OD sera

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2m}(x - d).$$

Remplaçons dans ces équations $x - d$ par $-q = \text{OB}$, il viendra

$$\text{BE} = -mq \quad \text{et} \quad \text{BD} = \frac{b'^2}{a'^2m}q.$$

Nous avons donc

$$\text{EB} \times \text{BD} = +\frac{b'}{a'^2}q^2.$$

Soit M le point où le cercle qui passe par les trois points E, O, D rencontre OA. Nous avons

$$\text{MB} \times \text{BO} = \text{BE} \times \text{BD}.$$

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs, nous trouvons

$$\text{MB} = \frac{b'^2}{a'^2}q.$$

La quantité BM étant constante, il s'ensuit que le théorème est démontré.

Tous ces cercles ayant une corde commune MO, il s'ensuit que le lieu de leur centre est la perpendiculaire élevée sur le milieu de MO.

Si l'on place le point O au centre, et qu'en même temps on prenne la directrice pour la ligne DD′, on trouve alors que le point M est situé sur le grand axe, à une distance de la directrice, troisième proportionnelle à l'excentricité et au demi-petit axe; et le lieu des centres devient une perpendiculaire au grand axe menée à une distance du centre égale à $\frac{b^2}{2c}$. De cette propriété on déduit le théorème suivant :

« Si d'un point quelconque de la perpendiculaire au
» grand axe menée à une distance du centre, troisième
» proportionnelle au double de l'excentricité et au demi-
» petit axe, on décrit une circonférence passant par le
» centre de l'ellipse, cette circonférence coupera la di-
» rectrice en deux points tels, qu'en les joignant au
» centre, on aura un système de diamètres conjugués. »

L'hyperbole jouit des mêmes propriétés.