NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Extrait des exercices d'analyse numérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 81-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__81_0>

EXTRAIT DES EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

I. PROBLÈME. *Résoudre en nombres entiers l'équation multiple*

$$(1) \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots,$$

a, b, c,..., étant des nombres entiers donnés.

Nota. Pour abréger, nous appellerons *équation multiple* une suite d'égalités telles que l'équation (1); $\frac{x}{a}$ sera le premier membre, $\frac{y}{b}$ le deuxième, $\frac{z}{c}$ le troisième, et ainsi de suite.

Nous représenterons par $D(ab)$ le plus grand diviseur commun aux nombres a et b, de même par $D(abc)$ le plus grand diviseur commun aux nombres a, b, c; de sorte qu'on aura

$$D(abc)=D[D(ab)c], \quad D(abcd)=D[D(abc)d], \ldots.$$

Ceci posé, la résolution générale du système (1) est donnée par le système

$$(2) \qquad \frac{U}{D(abc\ldots)}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\ldots;$$

d'où résulte

$$(3) \quad x=\frac{a}{D(abc\ldots)}\cdot U,\ y=\frac{b}{D(abc\ldots)}\cdot U,\ z=\frac{c}{D(abc\ldots)}\cdot U,\ldots,$$

valeurs dans lesquelles U est un entier indéterminé.

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'en égalant les deux premiers membres de l'équation (1), on a $bx=ay$

ou bien

$$\frac{b}{D(ab)} \cdot x = \frac{a}{D(ab)} y;$$

et comme $\frac{b}{D(ab)}$, $\frac{a}{D(ab)}$ sont premiers entre eux, l'entier x devra être divisible par $\frac{a}{D(ab)}$: on fera donc $x = u \cdot \frac{a}{D(ab)}$: par conséquent, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{u}{D(ab)}$.

Égalant $\frac{u}{D(ab)}$ au troisième membre $\frac{z}{c}$ de l'équation (1), on aura semblablement

$$\frac{u}{D(ab)} = \frac{z}{c} = \frac{v}{D(abc)}.$$

Continuant de même, on aura finalement le système (2), et, par suite, le système (3).

Applications.

II. Problème. Soient

(1) $$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{a}, \ldots$$

des fractions de même dénominateur, et soit proposé de trouver tous les systèmes de fractions équivalentes aussi réduites au même dénominateur, savoir :

(2) $$\frac{y}{x}, \quad \frac{z}{x}, \quad \frac{t}{x}, \ldots$$

Solution. On tire de là

(3) $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} \ldots$$

La valeur commune étant $\frac{U}{D(abcd\ldots)}$, la solution complète sera

$$x = \frac{a}{D(abcd\ldots)}\cdot U, \quad y = \frac{b}{D(abcd\ldots)}\cdot U, \ldots.$$

S'il arrive que a, b, c, d,..., n'aient pas de diviseur commun, $D(abcd\ldots) = 1$, et $x = a.U$, $y = b.U$, $z = c.U\ldots.$

En d'autres termes, pour obtenir le système (2), il faut multiplier tous les termes des fractions (1) par un même nombre U. Ce théorème est assez simple pour entrer dans l'arithmétique vulgaire.

III. Les deux équations

$$aA + bB + cC = 0,$$
$$aA' + bB' + cC' = 0,$$

donnent, par la résolution,

$$\frac{BC' - B'C}{a} = \frac{CA' - C'A}{b} = \frac{AB' - A'B}{c};$$

de sorte que si l'on pose $m = D(abc)$, on aura

$$BC' - B'C = \frac{a}{m}\cdot U,$$

$$CA' - C'A = \frac{b}{m}\cdot U,$$

$$AB' - A'B = \frac{c}{m}\cdot U.$$

Ces équations sont utiles dans différentes recherches sur les nombres; en voici une application

IV. Si la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{de déterminant} \quad b^2 - ac = d$$

se transforme en la fonction

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 \quad \text{de déterminant} \quad B^2 - AC = D,$$

par deux substitutions

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$
$$x = \alpha' x' + \beta' y', \quad y = \gamma' x' + \delta' y',$$

on aura les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} A = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ B = a\alpha\beta + b\,(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ C = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2\,; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A = a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2, \\ B = a\alpha'\beta' + b\,(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') + c\gamma'\delta', \\ C = a\beta'^2 + 2b\beta'\delta' + c\delta'^2. \end{cases}$$

De ces deux systèmes, on déduit

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (b^2 - ac)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2.$$

On suppose que D n'est pas nul; il faut donc que l'on ait

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1.$$

Nous prendrons ensemble, soient les signes supérieurs $+$, soient les signes inférieurs $-$, et nous dirons que les deux transformations sont semblables.

Cela posé, les systèmes (1), (2) donneront cet autre système :

$$\begin{gathered} a\,(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2b\,(\alpha\gamma - \alpha'\gamma') + c\,(\gamma^2 - \gamma'^2) = 0, \\ a\,(\alpha\beta - \alpha'\beta') + b\,(\alpha\delta + \beta\gamma - \alpha'\delta' - \beta'\gamma') + c\,(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \\ a\,(\beta^2 - \beta'^2) + 2b\,(\beta\delta - \beta'\delta') + c\,(\delta^2 - \delta'^2) = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma'. \end{gathered}$$

La quatrième équation donnant

$$\alpha\delta - \alpha'\delta' = \beta\gamma - \beta'\gamma',$$

nous prendrons le système

$$(3)\qquad \begin{cases} a\,(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2b\,(\alpha\gamma - \alpha'\gamma) + c\,(\gamma^2 - \gamma'^2), \\ a\,(\alpha\beta - \alpha'\beta') + 2b\,(\beta\gamma - \beta'\gamma') + c\,(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \\ a\,(\alpha\beta - \alpha'\beta') + 2b\,(\alpha\delta - \alpha'\delta') + c\,(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \\ a\,(\beta^2 - \beta'^2) + 2b\,(\beta\delta - \beta'\delta') + c\,(\delta^2 - \delta'^2) = 0. \end{cases}$$

L'élimination de b entre les deux premières équations donne, en supprimant le facteur $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$ qui ne peut être nul (*voyez* plus bas),

$$\frac{\delta\gamma' + \delta'\gamma}{a} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c}.$$

De même, l'élimination de a entre les troisième et quatrième équations du système (3) donne, en supprimant le facteur $\beta\delta' - \beta'\delta$, qui ne saurait être nul,

$$\frac{\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'}{2b} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c};$$

on a donc l'équation multiple

$$\frac{\delta\gamma' - \delta'\gamma}{a} = \frac{\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'}{2b} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c}:$$

de sorte qu'en représentant par m le plus grand commun diviseur des nombres a, $2b$, c, on aura, U étant un entier,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} a\mathrm{U} &= m(\delta\gamma' - \delta'\gamma), \\ 2b\mathrm{U} &= m(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'), \\ c\mathrm{U} &= m(\beta\alpha' - \beta'\alpha); \end{aligned}\right.$$

et comme l'on a identiquement

$$\begin{aligned} &(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')^2 - 4(\beta\alpha' - \beta'\alpha)(\delta\gamma' - \delta'\gamma) \\ &= (\alpha\delta' + \alpha\delta' - \beta'\gamma - \beta\gamma')^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'), \end{aligned}$$

en posant

$$2\mathrm{T} = m(\alpha\delta' + \alpha'\delta - \beta'\gamma - \beta\gamma'),$$

on aura, à cause de $b^2 - ac = \mathrm{D}$,

$$(5)\qquad \mathrm{T}^2 - \mathrm{DU}^2 = m^2.$$

La combinaison des valeurs de $2\mathrm{T}$ et $2b\mathrm{U}$ donne

$$\mathrm{T} + b\mathrm{U} = m(\alpha\delta' - \beta\gamma'),\quad \mathrm{T} - b\mathrm{U} = m(\alpha'\delta - \beta'\gamma).$$

Si l'on joint à ces équations

$$a\mathrm{U} = m(\delta\gamma' - \gamma\delta'),\quad c\mathrm{U} = m(\beta\alpha' - \alpha\beta'),$$

la résolution de deux couples d'équations du premier degré, où les inconnues sont α' et β' pour l'un, et γ' et δ' pour l'autre, donnera, en ayant égard à l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \pm m\alpha' = \alpha T - (b\alpha + c\gamma)\,U, \\ \pm m\beta' = \beta T - (b\beta + c\delta)\,U, \\ \pm m\gamma' = \gamma T + (a\alpha + b\gamma)\,U, \\ \pm m\delta' = \delta T + (a\beta + b\delta)\,U. \end{array}\right.$$

Ces formules ont été données par M. Gauss, dans le n° 162 de ses *Recherches arithmétiques;* le calcul précédent paraîtra plus simple à beaucoup de lecteurs.

V. On a supposé plus haut qu'on ne pouvait avoir $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$. En effet, d'après

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1,$$

α et γ sont premiers entre eux, aussi bien que α' et γ'. Or l'équation $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ donnant $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$, il faudrait que l'on eût $\alpha' = \pm\alpha$, $\gamma' = \pm\gamma$. L'équation $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1$ deviendrait $\alpha\delta' - \gamma\beta' = \pm 1$; on aurait donc nécessairement $\delta' = \pm\delta + K\gamma$, $\beta' = \pm\beta + K\alpha$, K étant entier.

De là $B = a\alpha'\beta' + b(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') + c\gamma'\delta'$ devient

$$B = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \pm K(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2),$$

ou

$$B = B \pm KA, \quad \text{d'où} \quad K = 0,$$

car A n'est pas nul; ainsi, les deux substitutions seraient $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta)$, c'est-à-dire les mêmes, ou opposées, ce qui est contre l'hypothèse faite plus haut.

On prouve tout à fait de même qu'on ne saurait avoir $\beta\delta' - \beta'\delta = 0$.