

TERQUEM

**Formules générales de Waring pour
trouver la valeur des fonctions symétriques
entières et rationnelles des racines d'une
équation algébrique**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 76-79

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__76_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES GÉNÉRALES DE WARING

Pour trouver la valeur des fonctions symétriques entières et rationnelles des racines d'une équation algébrique (*).

Sommes des puissances entières positives des racines.

1. Soit donnée l'équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + (-1)^m A_m = 0, \\ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m),$$

n étant un nombre entier positif; on a, d'après un symbole connu,

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n.$$

Il s'agit de trouver S_n en fonction des coefficients de l'équation.

Ordonnons cette fonction par rapport aux puissances décroissantes de A_1 ; il vient

$$S_n = A_1^n + T_1 A_1^{n-1} + T_2 A_1^{n-2} + \dots + T_p A_1^{n-p} + \dots + T_n$$

Loi de formation.

Le terme général T_p est un polynôme; le terme général de ce polynôme est représenté par

$$R. A_1^\rho A_2^\sigma A_3^\tau \dots,$$

ou $r, s, t, \dots$, indices inférieurs, sont des nombres entiers plus grands que 1; et $\rho, \sigma, \tau, \dots$ des exposants positifs entiers, zéro compris. Pour trouver ces nombres, on résout l'équation indéterminée

$$1\rho + 2\sigma + 3\tau = \dots = p,$$

et ayant soin de ne négliger aucune solution.

(* *Meditationes algebrae*. Ldii tertia, 1782, p. 1 et 8

R est un coefficient numérique : les indices et les exposants étant connus, on fait

$$\rho + \sigma + \tau + \dots = u;$$

et l'on a, abstraction faite de tout signe,

$$R = \frac{n[n-p+1]}{[\rho][\sigma][\tau] \dots [n-p+u]};$$

les crochets désignent des produits continuels. Si p et u sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, le signe de R est positif; et négatif dans l'autre cas.

D'après cette loi, on trouve

$$T_1 = 0; \quad T_2 = -nA_2; \quad T_3 = nA_3; \quad T_4 = -nA_4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-3}{2} A_2';$$

$$T_5 = nA_5 - n \cdot n - 4 A_2 A_3; \quad T_6 = -nA_6 + n \cdot n - 5 \cdot A_2 A_4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-5}{2} A_3^2;$$

$$T_7 = nA_7 - n \cdot n - 6 A_2 A_5 - n \cdot n - 6 A_3 A_4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-6}{2} \cdot \frac{n-5}{1} A_2^2 A_3,$$

$$T_8 = -nA_8 \cdot n \cdot n - 7 A_6 A_2 + n \cdot n - 7 A_4 A_4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-7}{2} A_3^2;$$

$$- n \cdot \frac{n-7}{1} \cdot \frac{n-6}{2} A_2^2 A_4 - n \cdot n - 7 \cdot \frac{n-6}{2} A_3^2 A_2,$$

$$+ n \cdot \frac{n-7}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot \frac{n-5}{4} A_2^4.$$

Waring ne dit pas comment il est parvenu à cette formule; mais il démontre que si elle est vraie pour n , elle est vraie aussi pour $n+1$: d'ailleurs, les sommes des racines forment une série récurrente à échelle de relation connue, dont on sait toujours trouver le terme général.

Fonction symétrique entière des racines en fonction des sommes des racines.

2. Même équation que ci-dessus, et représentons la somme à chercher par $\Sigma x_1^a x_2^b \dots x_n^t$, n des m racines entrant dans chaque terme; $a, b, c, \dots, d$ sont des expo-

sants entiers positifs et *inégaux*. Voici la notation de Waring :

$$s_a = x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a,$$

$$s_b = x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A = s_a \cdot s_b \cdot s_c \dots s_t,$$

$$B = A \left[\frac{s_{a+b}}{s_a \cdot s_b} + \frac{s_{a+c}}{s_a \cdot s_c} + \dots + \frac{s_{b+c}}{s_b \cdot s_c} + \dots \right],$$

$$C = A \left[\frac{s_{a+b+c}}{s_a \cdot s_b \cdot s_c} + \frac{s_{a+b+d}}{s_a \cdot s_b \cdot s_d} + \dots \right],$$

$$D = A! \left[\frac{s_{a+b+c+d}}{s_a s_b s_c s_d} + \dots \right],$$

$$BB = A \left[\frac{s_{a+b} \cdot s_{c+d}}{s_a s_b s_c s_d} + \dots \right],$$

$$E = A \left[\frac{s_{a+b+c+d+e}}{s_a s_b s_c s_d s_e} + \dots \right],$$

$$BC = A \left[\frac{s_{a+b+c} \cdot s_{d+e}}{s_a s_b s_c s_d s_e} \right],$$

$$F = A \left[\frac{s_{a+b+c+d+e+f}}{s_a s_b s_c s_d s_e s_f} + \dots \right].$$

Dans cette relation, B, C, D, E présentent des sommes à 2, 3, 4, 5 exposants s_{a+b} , s_{a+b+c} , $s_{a+b+c+d}$, $s_{a+b+c+d+e}$, etc. Mais 4 se décompose en $2+2$: c'est à quoi répond BB, où l'on trouve $s_{a+b} s_{c+d}$; 5 se décompose en $2+3$, on a ainsi BC; de même $6=2+4=3+3$; ce qui donne BD, CC et BBB, ou $s_{a+b} s_{c+d+e+f}$ et $s_{a+b+c} s_{d+e+f}$ et $s_{a+b} s_{c+d} s_{e+f}$. Cela posé, on a

$$\begin{aligned} \simeq x_1^b x_2^b \dots x_n^b = & A - B + 1.2.C - 1.2.3.D + 1.2.3.4.E, \\ & 1.1.BB - 1.2. \quad BC, \\ & - 1.2.3.4.5.F + 1.2.3.4.5.6.G, \\ & - 1.2. \quad BD - 1.1.2.3.4.BE, \\ & 1.2.1.2. \quad CC - 1.2.1.2.3.CD, \\ & 1.1.1. \quad BBB + 1.1.1.1.2.BBC. \end{aligned}$$

Loi de formation.

a. Chaque lettre apporte un coefficient et un signe déterminés, dans cet ordre. Ainsi :

B, -1 ; C, $+1.2$; D, $-1.2.3$; E, $+1.2.3.4$; F, $-1.2.3.4.5$,
et ainsi de suite.

b. Les termes de même dimension sont dans la même colonne verticale. Waring démontre encore que si la formule existe pour n racines, elle existe aussi pour $n + 1$ racines.

Lorsque des exposants deviennent égaux, il faut diviser les termes A, B, C, D, etc., par les produits continuels convenables.