NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON DE CHAMP

Question 31. Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 61-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__61_0>

QUESTION 31
(t I, p. 394).

Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite ;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

L'équation du troisième degré

$$y^2 + z^2 = 2z(p^2 - q^2x^2),$$

où p et q sont des quantités réelles différentes de zéro, satisfait à la condition énoncée. Car, d'abord, on voit que l'axe des x appartient à la surface, puisque l'équation devient identique en faisant $y = 0$, $z = 0$, sans qu'il soit besoin de particulariser x. Supposons maintenant qu'une autre droite, ayant pour équations

$$y = bx + \beta, \qquad z = cx + \gamma,$$

appartienne, s'il est possible, à la même surface. Par la substitution de ces valeurs de y et de z, l'équation ci-dessus devra être rendue identique, x demeurant indéterminé, et, par suite, les coefficients des diverses puissances de cette variable seront nuls. On trouve ainsi les quatre relations

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + 2q^2\gamma &= 0, \\ b\beta + c\gamma - p^2c^2 &= 0, \\ \beta^2 + \gamma^2 - 2p^2\gamma &= 0, \\ 2cq^2 &= 0. \end{aligned}$$

La dernière donne $c = 0$, et, par suite, la seconde se réduit à $b\beta = 0$ en faisant $b = 0$; on tire de la première et de la troisième $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, c'est-à-dire le système des données qui particularisent l'axe des x. Si l'on fait $\beta = 0$

il vient, par la troisième relation, $\gamma(\gamma - 2p^2) = 0$. L'hypothèse $\gamma = 0$ donne encore l'axe des x. Il ne reste donc plus qu'à faire $\gamma = 2p^2$, d'où $b^2 + 4p^2q^2 = 0$, équation qui n'a pas de racines réelles. Il n'y a donc aucune autre droite que l'axe des x, qui puisse être tracée sur la surface. (*La fin prochainement.*)