

Question d'examen sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 48-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__48_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN SUR LES FRACTIONS CONTINUES (*).

I. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre nombres positifs entiers rangés par ordre ascendant ; on a les relations d'inégalités suivantes :

$$1^{\circ}. \quad a_1 a_2 - a_3 a_4 < 0.$$

$$2^{\circ}. \quad a_3 a_4 - a_1 a_2 > 1. \quad \text{En effet, soit } a_3 = a_1 + m, \\ a_4 = a_2 + n, \quad a_3 a_4 - a_1 a_2 \\ = ma_2 + na_1 + mn > 1.$$

$$3^{\circ}. \quad a_1 a_3 - a_2 a_4 < 0.$$

$$4^{\circ}. \quad a_2 a_4 - a_1 a_3 > 1, \text{ comme pour } 2^{\circ}.$$

II. Supposons qu'on a la relation

$$(1) \quad a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1.$$

Posons l'équation indéterminée $a_4 y - a_3 x = 1$; les plus petites valeurs positives entières de y et de x sont a_1 et a_2 : s'il existait des valeurs α et β plus petites, on aurait donc

$$a_4 \alpha - a_3 \beta = 1; \quad \text{donc } a_4 (\alpha - a_1) = a_3 (\beta - a_2);$$

ce qui est évidemment impossible.

* M. Serret examinateur.

L'équation $a_3 x - a_4 y = 1$ est satisfaite, en posant $x = a_4 - a_3$, $y = a_3 - a_1$. On démontre de même que ces valeurs positives sont les plus petites qu'on puisse avoir.

Observation. Ces résultats s'énoncent brièvement de cette manière : à la congruence $a_4 y - 1 \equiv \dot{a}_3$ a pour racine unique a_1 , et la congruence $a_3 x - 1 \equiv \dot{a}_4$ a pour racine a_2 ; le point leibnitzien placé au-dessus d'un nombre indique un multiple quelconque de ce nombre.

III. Soient $\frac{r}{s}, \frac{t}{u}$ deux réduites consécutives d'une fraction continue, et soit p le dernier dénominateur correspondant à la réduite $\frac{t}{u}$. Si p est remplacé par $p - 1$, on a pour réduite $\frac{t-r}{u-s}$; car le quotient entier de $\frac{t}{r}$ est p : donc le quotient entier de $\frac{t-r}{r}$ est $p - 1$; de même pour les dénominateurs.

IV. Conservant la relation (1), réduisons $\frac{a_1}{a_i}$ en fraction continue. Soit $\frac{r}{s}$ l'avant-dernière réduite; il y a deux cas : 1° $\frac{r}{s} > \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $ra_4 - sa_3 = 1$. Donc r et s satisfont à l'équation $a_4 y - a_3 x = 1$; mais $r < a_3$, $s < a_4$; donc, d'après II, on a

$$r = a_1 \text{ et } s = a_2.$$

Ainsi l'avant-dernière réduite est $\frac{a_1}{a_2}$; 2° $\frac{r}{s} < \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $sa_3 - ra_4 = 1$. r et s satisfont à l'équation $a_3 x - a_4 y = 1$, donc, d'après II, $r = a_4 - a_2$, $s = a_3 - a_1$: l'avant-dernière réduite est donc $\frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_2}$. Si l'on diminue d'une unité

le dernier dénominateur de la fraction continue, la valeur de cette fraction devient égale (III) à $\frac{a_1}{a_2}$.

V. On parvient à des conclusions analogues, si l'on a la relation $a_2 a_3 - a_1 a_4 = 1$, ou bien encore si l'on réduit en fraction continue $\frac{a_2}{a_4}$.
