Nouvelles annales de mathématiques

TERQUEM

Théorème sur les carrés des côtés d'un triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 47-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__47_0>

THÉORÈME SUR LES CARRÉS DES COTÉS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE (*).

I. *Lemme.* Soient A, B, C les trois sommets, et a, b, c les trois côtés respectivement opposés, et S l'aire du triangle ABC; on a la relation

$$4S(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b + c^2.$$

Démonstration. On a $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot A$, et encore deux équations analogues; ajoutant les trois équations membre à membre, on obtient la relation indiquée.

II. *Théorème.* Sur chaque côté du triangle ABC on construit extérieurement un carré. Soient A′, B′, C′ les centres des carrés construits sur BC, AC, AB; on aura

$$\frac{\text{aire A}'\text{B}'\text{C}'}{\text{aire ABC}} = 1 + \tfrac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C).$$

Démonstration. Conservons la même notation que dans le lemme. L'aire de l'hexagone AC′BA′CB′ est évidemment $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S$: on a $AC' = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $AB' = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $C'AB' = 1^{d} + A$. donc l'aire du triangle C′AB′ est égale à $\frac{bc}{4} \cos A = \frac{S}{2} \cot A$; de même,

$$\text{aire B}'\text{CA}' = \frac{S}{2} \cot C; \quad \text{A}'\text{BC}' = \frac{S}{2} \cot B;$$

donc

$$\text{aire A}'\text{B}'\text{C}' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S - \tfrac{1}{2} S(\cot A + \cot B + \cot C),$$

(*) Programme de l'université de Dublin 1848.

et, d'après le lemme,

$$\text{aire } A'B'C' = S\left[1 + \tfrac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)\right].$$

C. Q. F. D.

III. Si l'on construit extérieurement un carré sur chaque côté d'un triangle rectangle, l'aire du triangle qui a pour sommets les centres des trois carrés est égale au carré formé sur la demi-somme des côtés de l'angle droit.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.