

TERQUEM

**Théorème sur les carrés des côtés
d'un triangle rectiligne**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 47-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__47_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈME SUR LES CARRÉS DES CÔTÉS D'UN TRIANGLE
RECTILIGNE (*).**

I. *Lemme.* Soient A, B, C les trois sommets, et a, b, c les trois côtés respectivement opposés, et S l'aire du triangle ABC; on a la relation

$$4S (\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Démonstration. On a $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot A$, et encore deux équations analogues; ajoutant les trois équations membre à membre, on obtient la relation indiquée.

II. *Théorème.* Sur chaque côté du triangle ABC on construit extérieurement un carré. Soient A', B', C' les centres des carrés construits sur BC, AC, AB; on aura

$$\frac{\text{aire } A'B'C'}{\text{aire } ABC} = 1 + \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C).$$

Démonstration. Conservons la même notation que dans le lemme. L'aire de l'hexagone AC'BA'CB' est évidemment $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S$: on a $AC' = \frac{c}{\sqrt{2}}$;

$AB' = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $C'AB' = 1^{\text{er}} + A$. donc l'aire du triangle

$C'AB'$ est égale à $\frac{bc}{4} \cos A = \frac{S}{2} \cot A$; de même,

$$\text{aire } B'CA' = \frac{S}{2} \cot C; \quad \text{aire } A'BC' = \frac{S}{2} \cot B;$$

donc

$$\text{aire } A'B'C' = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S - \frac{1}{2}S(\cot A + \cot B + \cot C),$$

* Programme de l'université de Dublin 1848.

et, d'après le lemme,

$$\text{aire } A'B'C' = S \left[1 + \frac{1}{2} (\cot A + \cot B + \cot C) \right].$$

C. Q. F. D.

III. Si l'on construit extérieurement un carré sur chaque côté d'un triangle rectangle, l'aire du triangle qui a pour sommets les centres des trois carrés est égale au carré formé sur la demi-somme des côtés de l'angle droit.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.