NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. AGARRAT

Solution de la question 208

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 443-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__443_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 208

(voir p. 236) ;

PAR M. F. AGARRAT,
Professeur de mathematiques supérieures au lycée d'Aix.

$F(x) = 0$ *est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales; démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de* (Fx^{-1}), *l'équation* $(F'x)^2 - \frac{1}{2} F(x) F''(x) = 0$, *qu'on obtient ainsi, a toutes ses racines imaginaires.* (CATALAN.)

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ soit du degré m, et désignons ses racines par α, β, γ, δ,..., nous pourrons écrire

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$$

Posons, pour abréger,

$$a = x - \alpha,\quad b = x - \beta,\quad c = x - \gamma,\quad d = x - \delta,\ldots,$$

nous aurons

$$(1)\qquad F(x) = abcd\ldots;$$

$$(2)\qquad F'(x) = F(x)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots +\right):$$

$$(3)\quad \frac{F''(x)}{2} = F(x)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \ldots + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \ldots + \frac{1}{cd}\right).$$

Élevons les deux membres de l'équation (2) au carré, il viendra

$$(F'x)^2 = (Fx)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \ldots\right)$$
$$+ 2F(x).F(x)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \ldots + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \ldots + \frac{1}{cd} + \ldots\right).$$

On aura donc

$$(F' x)^2 = (F x)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \ldots\right) + F x . F''(x),$$

d'où

$$\frac{(F'x)^2}{2} - \frac{1}{2} F(x) F''(x) = \frac{(F x)^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \ldots\right).$$

Le second membre, étant une somme de carrés, ne peut jamais devenir nul; donc le premier membre ne peut s'annuler par aucune valeur réelle de x. Cette conclusion est vraie, à plus forte raison, pour le premier membre de l'équation

$$(F'x)^2 - \frac{1}{2} Fx\, F''x = 0;$$

donc, etc.