Démonstration élémentaire de la question arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 421-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__421_1>

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE DE LA QUESTION ARITHMÉTIQUE

(Voir p. 354.)

PAR E. C.

Soit

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n;$$

d'où

$$S(1 - q) = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - nq^{n+1}$$
$$= \frac{q(q^n - 1)}{q - 1} - nq^{n+1},$$

puis

$$S = \frac{q(1 - q^n)}{(1 - q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1 - q} = \frac{q[1 - q^n(n+1) + nq^n]}{(1 - q)^2}.$$

Lorsque $q = 1$, $S = \frac{0}{0}$; on prend, d'après la méthode connue, la dérivée seconde, et l'on trouve $S = \frac{n(n+1)}{2}$, comme cela doit être.

Note. Soit

(1) $$S = A_0 x^0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n;$$

de là

$$(2)\left\{\begin{array}{l} S(1-x) = x^0(A_0 - A_{-1}) + x(A_1 - A_0) + x^2(A_2 - A_1) + \ldots \\ \qquad + x^n(A_n - A_{n-1}) + x^{n+1}(A_{n+1} - A_n); \end{array}\right.$$

retranchant de la série (2) cette série, multipliée par x, on obtient

$$(3)\left\{\begin{array}{l} S(1-x)^2 = x^0(A_0 - 2A_{-1} + A_{-2}) + x(A_1 - 2A_0 + A_{-1}) \\ \qquad + x^2(A_2 - 2A_1 + A_0) \ldots x^n(A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2}) \\ \qquad + x^{n+1}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) + x^{n+2}(A_{n+2} + 2A_{n+1} + A_n); \end{array}\right.$$

et, en continuant de même, on trouve

$$(4) \qquad S(1-x)^m = \sum_0^{n+m} \Delta_m A_p x^p.$$

$\Delta_m A_p$ désigne la différence m^{ieme} des coefficients. On sait que l'on a

$$\Delta_m A_p = A_p - m A_{p-1} + \frac{m(m-1)}{2} A_{p-} + \ldots + (-1)^m A_{p-m},$$

et l'on rejette comme nuls les indices au-dessous de zéro et au-dessus de n; on ne les conserve que pour faire ressortir l'uniformité de la loi.

$\sum\limits_0^{n+m}$ indique la somme de tous les termes que l'on obtient en donnant à p successivement toutes les valeurs de 0 à $m+n$.

Il est évident que si la différence m^{ieme} des coefficients est constante, alors la série (4) est une progression géométrique; on tirera donc de l'équation (4) la valeur de S. Donc, lorsque $A_p = F(p)$, F représentant une fonction algébrique entière de p, on pourra toujours trouver la somme de la série (1).

Exemple :

Δ_1 constant, $\quad S(1-x) = \dfrac{\Delta_1 \cdot x(1-x^n)}{1-x} + A_0 x^0 - A_n x^{n+1};$

Δ_2 constant, $\quad S(1-x)^2 = \dfrac{\Delta_2 \cdot x^2(1-x^{n-1})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 2A_0)$
$\qquad + x^{n+1}(-2A_n + A_{n-1}) + A_n x^{n+2};$

Δ_3 constant, $\quad S(1-x)^3 = \dfrac{\Delta_3 \cdot x^3(1-x^{n-2})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 3A_0)$
$\qquad + x^2(A_2 - 3A_1 + 3A_0) + \ldots$
$\qquad + x^{n+1}(-3A_n + 3A_{n-1} + A_{n-2})$
$\qquad + x^{n+2}(+3A_n - A_{n-1}) - A_n x^{n+3},$

et ainsi de suite.