

Démonstration élémentaire de la question arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 421-423

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__421_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE DE LA QUESTION ARITHMETIQUE

(Voir p. 354)

PAR E. C.

Soit

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n;$$

d'où

$$\begin{aligned} S(1 - q) &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1} \\ &= \frac{q(q^n - 1)}{q - 1} - nq^{n+1}, \end{aligned}$$

puis

$$S = \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} - \frac{nq^{n+1}}{1 - q} = \frac{q[1 - q^n(n + 1) + nq^n]}{(1 - q)^2}.$$

Lorsque $q = 1$, $S = \frac{0}{0}$; on prend, d'après la méthode connue, la dérivée seconde, et l'on trouve $S = \frac{n(n+1)}{2}$, comme cela doit être.

Note. Soit

$$(1) \quad S = A_0 r^0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n;$$

de là

$$(2) \left\{ \begin{aligned} S(1-x) &= x^0(A_0 - A_{-1}) + x(A_1 - A_0) + x^2(A_2 - A_1) + \dots \\ &+ x^n(A_n - A_{n-1}) + x^{n+1}(A_{n+1} - A_n); \end{aligned} \right.$$

retranchant de la série (2) cette série, multipliée par x , on obtient

$$(3) \left\{ \begin{aligned} S(1-x)^2 &= x^0(A_0 - 2A_{-1} + A_{-2}) + x(A_1 - 2A_0 + A_{-1}) \\ &+ x^2(A_2 - 2A_1 + A_0) \dots x^n(A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2}) \\ &+ x^{n+1}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) + x^{n+2}(A_{n+2} + 2A_{n+1} + A_n); \end{aligned} \right.$$

et, en continuant de même, on trouve

$$(4) \quad S(1-x)^m = \sum_0^{n+m} \Delta_m A_p x^p.$$

$\Delta_m A_p$ désigne la différence $m^{ème}$ des coefficients. On sait que l'on a

$$\Delta_m A_p = A_p - mA_{p-1} + \frac{m(m-1)}{2} A_{p-2} + \dots + (-1)^m A_{p-m},$$

et l'on rejette comme nuls les indices au-dessous de zéro et au-dessus de n ; on ne les conserve que pour faire ressortir l'uniformité de la loi.

\sum_0^{n+m}

indique la somme de tous les termes que l'on obtient en donnant à p successivement toutes les valeurs de 0 à $m+n$.

Il est évident que si la différence $m^{ème}$ des coefficients est constante, alors la série (4) est une progression géométrique; on tirera donc de l'équation (4) la valeur de S . Donc, lorsque $A_p = F(p)$, F représentant une fonction algébrique entière de p , on pourra toujours trouver la somme de la série (1).

Exemple :

$$\Delta_1 \text{ constant, } S(1-x) = \frac{\Delta_1 \cdot x(1-x^{n+1})}{1-x} + A_0 x^0 - A_n x^{n+1};$$

$$\Delta_2 \text{ constant, } S(1-x)^2 = \frac{\Delta_2 \cdot x^2(1-x^{n+1})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 2A_0) \\ + x^{n+1}(-2A_n + A_{n-1}) + A_n x^{n+2};$$

$$\Delta_3 \text{ constant, } S(1-x)^3 = \frac{\Delta_3 \cdot x^3(1-x^{n+2})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 3A_0) \\ + x^2(A_2 - 3A_1 + 3A_0) + \dots \\ + x^{n+1}(-3A_n + 3A_{n-1} + A_{n-2}) \\ + x^{n+2}(+3A_n - A_{n-1}) - A_n x^{n+3},$$

et ainsi de suite.