

Théorie des lunules géométriquement carrables, d'après M. Th. Clausen, à Altona

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 395-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__395_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES LUNULES GÉOMÉTRIQUEMENT CARRABLES,

D'APRÈS M. TH. CLAUSEN, à Altona.

(Journal de M. Crelle, tome XXI, page 375; 1841.)

Soient deux secteurs de cercle *équivalents* et ayant même corde AB, les centres C et C' étant du même côté de la corde commune; il est évident que l'aire comprise entre les deux arcs de cercle formant *lunule* est égale à l'aire du quadrilatère ABCC'.

Faisons

$$AC = r; \text{ angle } ACB = 2m\alpha; \quad AC' = r'; \text{ angle } AC'B = 2n\alpha;$$

on a évidemment les deux équations

$$r^2 m = r'^2 n; \quad r \sin m\alpha = r' \sin n\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$(1) \quad n^{\frac{1}{2}} \sin m\alpha = m^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha.$$

Si m et n sont des nombres entiers, cette dernière équation s'exprime rationnellement en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ (voir t. V, p. 223). Il s'agit donc de savoir quand cette équation est susceptible d'une solution *géométrique*.

Voici quelques cas :

$$(a) \quad m = 1; \quad n = 2;$$

on obtient les lunules connues d'Hippocrate.

$$(b) \quad m = 1; \quad n = 3;$$

l'équation (1) devient

$$\sqrt{3} \sin \alpha = \sin 3\alpha;$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1);$$

radical géométriquement construible; on a, à peu près,

$$AC'B = 68^{\circ},5; \quad ACB = 205^{\circ},6.$$

$$(c) \quad m = 2; \quad n = 3;$$

on a

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha + 1}{2 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \frac{4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha + 1}{2 \cos 2\alpha + 2} = \frac{3}{2};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8};$$

$$AC'B = 107^{\circ},2; \quad ACB = 160^{\circ},9 \text{ environ.}$$

$$(d) \quad m = 1; \quad n = 5;$$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha} = 4 \cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{(5 + 4\sqrt{5})}}{4};$$

$$AC'B = 46^{\circ},9; \quad ACB = 234^{\circ},4 \text{ environ.}$$

$$(e) \quad m = 3; \quad n = 5;$$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4 \cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha - 1}{2 \cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{5}{3}};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = -1 + \sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}};$$

$$\angle C'B = 100^{\circ},8; \quad \angle ACB = 168^{\circ} \text{ environ.}$$

Dans tous ces radicaux, il n'y a qu'un seul signe applicable à la question. Ainsi, outre la lunule d'Hippocrate, on a encore quatre nouvelles lunules géométriquement carrables. En existe-t-il encore d'autres?

Note. En projetant orthogonalement les lunules circulaires, on obtient des lunules elliptiques carrables. Si sur les côtés d'un polygone *équilatère* d'un nombre pair de côtés, on construit des segments égaux, alternativement à l'intérieur et à l'extérieur, on construit un polygone formé de côtés curvilignes, et ayant évidemment même aire que le polygone rectiligne.