G. EISENSTEIN

Sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 341-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__341_0>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. G. EISENSTEIN.

(Journal de M. Crelle, t. XXVIII, p. 38, 1844; en français.)

Pour le cas où n est un entier impair, ω désignant une racine *primitive* de l'équation $\omega^n - 1 = 0$, M. Gauss a donné la formule

$$\begin{aligned}&1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-6} \ldots + \omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\\ &\quad = (1-\omega)(1-\omega^3)(1-\omega^5)\ldots(1-\omega^{n-2});\end{aligned}$$

en transformant ce produit dans la série suivante,

$$1 + \frac{1-\omega}{1-\omega^2} + \frac{(1-\omega)(1-\omega^3)}{(1-\omega^2)(1-\omega^4)} + \frac{(1-\omega)(1-\omega^3)(1-\omega^5)}{(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^6)} + \ldots;$$

et, en développant celle-ci en fraction continue, je trouve

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+\omega - \cfrac{\omega}{1+\omega^2 - \cfrac{\omega^2}{1+\omega^3} \cdots \cfrac{\omega^{n-2}}{1+\omega^{n-1}}}}}.$$

Cela fournit cette équation remarquable :

$$\begin{aligned}&1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \ldots + \omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\\ &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+\omega - \cfrac{\omega}{1+\omega^2} \cdots \cfrac{\omega^{n-2}}{1+\omega^{n-1}}}};\end{aligned}$$

d'un autre côté, on a, comme l'on sait,

$$1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-6} + \ldots \omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$
$$= \omega^{-\frac{1}{8}(n^2-1)} \sqrt{(-1)^{-\frac{1}{2}(n-1)} n},$$

où le signe du radical peut être déterminé par les méthodes connues.

On a donc aussi :

$$\sqrt{(-1)^{-\frac{1}{2}(n-1)} n} = \cfrac{\omega^{\frac{1}{8}(n^2-1)}}{1 - \cfrac{1}{1 + \omega - \cfrac{\omega}{1 + \omega^2} \cdots \ldots - \cfrac{\omega^{n-2}}{1 + \omega^{n-1}}}}.$$

Cette expression en fraction continue et finie du radical $\sqrt{\pm n}$, suivant une loi si simple, me paraît très-remarquable, et je ne crois pas qu'une formule semblable soit connue.

Je remarque encore que l'on a

$$\left(1 - \frac{z}{p}\right)\left(1 - \frac{z}{p^2}\right)\left(1 - \frac{z}{p^3}\right) \ldots = \varphi(z)$$
$$= 1 + \cfrac{z}{1 - p + \cfrac{z}{\cfrac{1-p^2}{1-p} + \cfrac{p^2 z}{1 - p^3 - \cfrac{pz}{\cfrac{1-p^4}{1-p^2} + \cfrac{p^4 z}{1-p^5} - \ldots}}}}$$

Tous les dénominateurs sont ici des fonctions entières de p. Soit $z = 1$ et p un nombre entier, tous les dénominateurs et tous les numérateurs seront des nombres entiers, et les premiers surpasseront les derniers. On conclut de là que la valeur du produit infini

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\cdot\;\cdot$$

est toujours une quantité irrationnelle, p étant entier et >1. A l'aide de la formule

$$\varphi(z)=\left(1-\frac{z}{p}\right)\varphi\left(\frac{z}{p}\right),$$

on peut exprimer rationnellement $\varphi(z)$ par une autre fonction $\varphi(\zeta)$, dont la variable est d'une petitesse arbitraire. En considérant donc attentivement la fraction continue, il sera facile d'en tirer une proposition plus générale; ce que nous laissons au lecteur.

Toutes les fractions continues que nous avons présentées ici ne sont que des exemples particuliers. Les méthodes que nous avons employées pour y parvenir nous ont fourni des fractions continues d'une généralité telle, que j'ose assurer qu'elles renferment, outre une foule de résultats nouveaux et très-remarquables comme cas spéciaux, toutes les fractions continues trouvées jusqu'à présent, et surtout celles de M. Gauss. C'est ce que nous expliquerons dans une autre occasion.

Ce qui m'a fort intéressé dans ces recherches, ce sont les équations identiques qui se présentent en comparant les résultats. Ainsi, par exemple, parce que la fraction continue dans laquelle nous avons développé

$$1+\omega^{-1}+\omega^{-3}+\omega^{-6}+\ldots\,\omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

se trouve aussi sans le secours de la transformation de M. Gauss, il en résulte une nouvelle manière de vérifier cette ingénieuse transformation. Il existe des résultats analogues pour les formules qui se rapportent aux fonctions elliptiques.